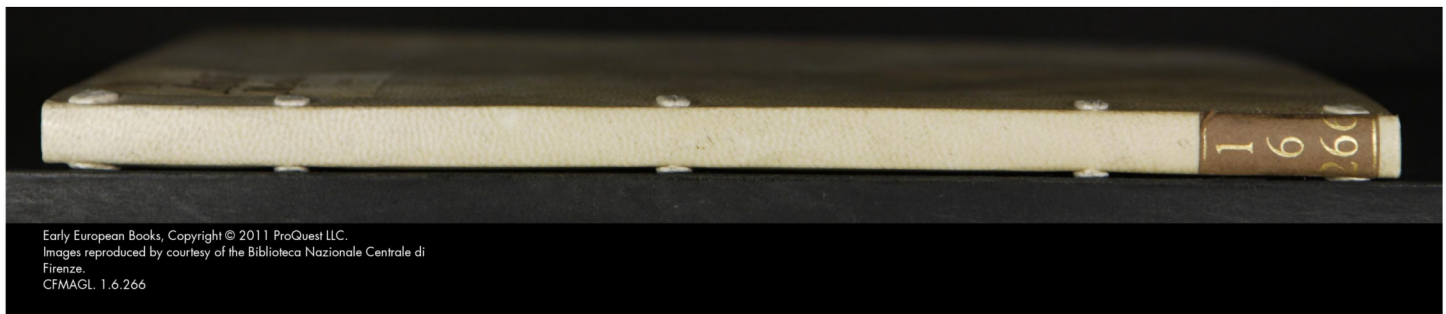
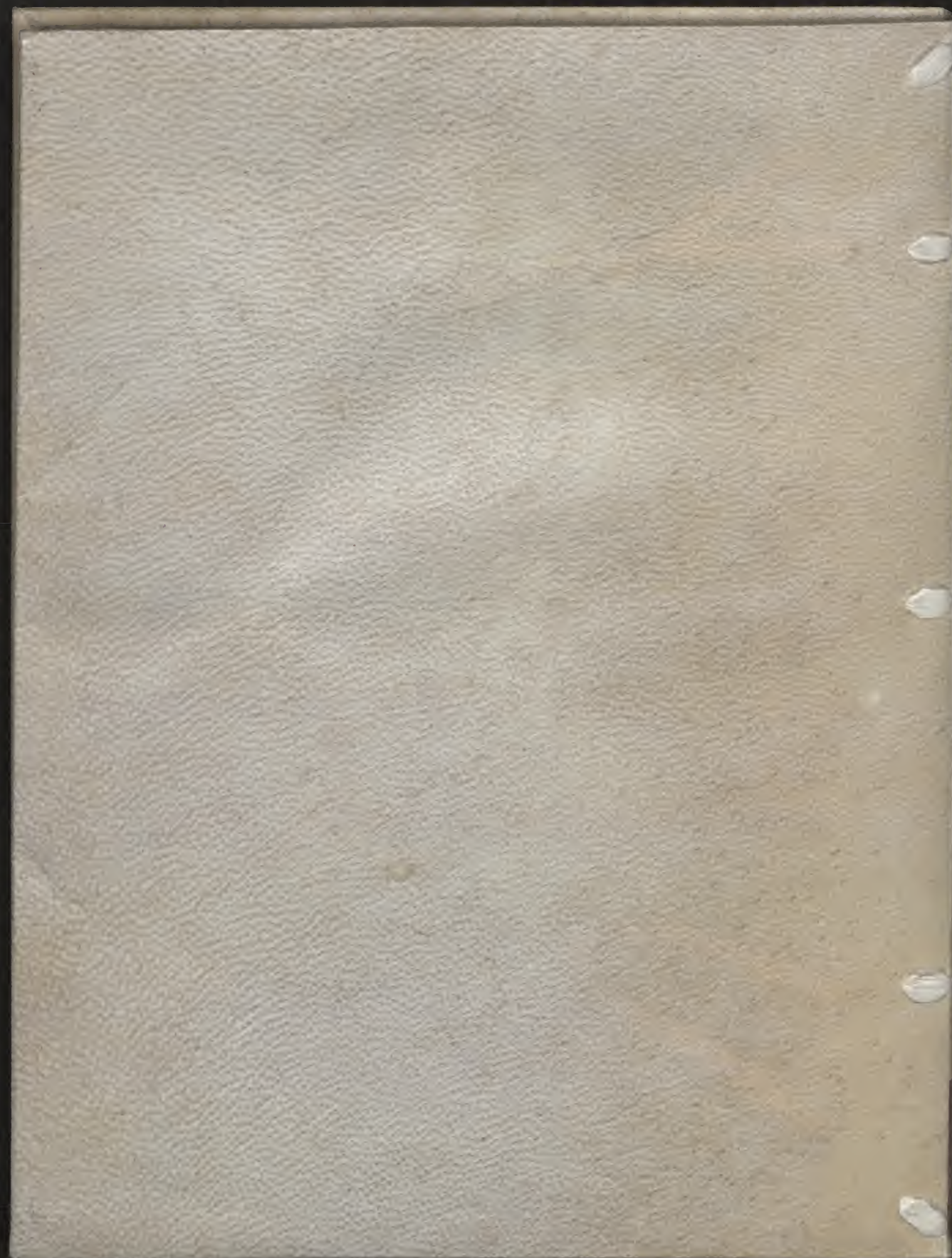


XI  
ANON.  
Mesolab.  
1859



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.  
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di  
Firenze.  
CFMAGL 1.6.266







Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.  
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di  
Firenze.  
CFMAGL. 1.6.266





Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.  
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di  
Firenze.  
CFMAGL. 1.6.266



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.  
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di  
Firenze.  
CFMAGL. 1.6.266







1. 6. 266



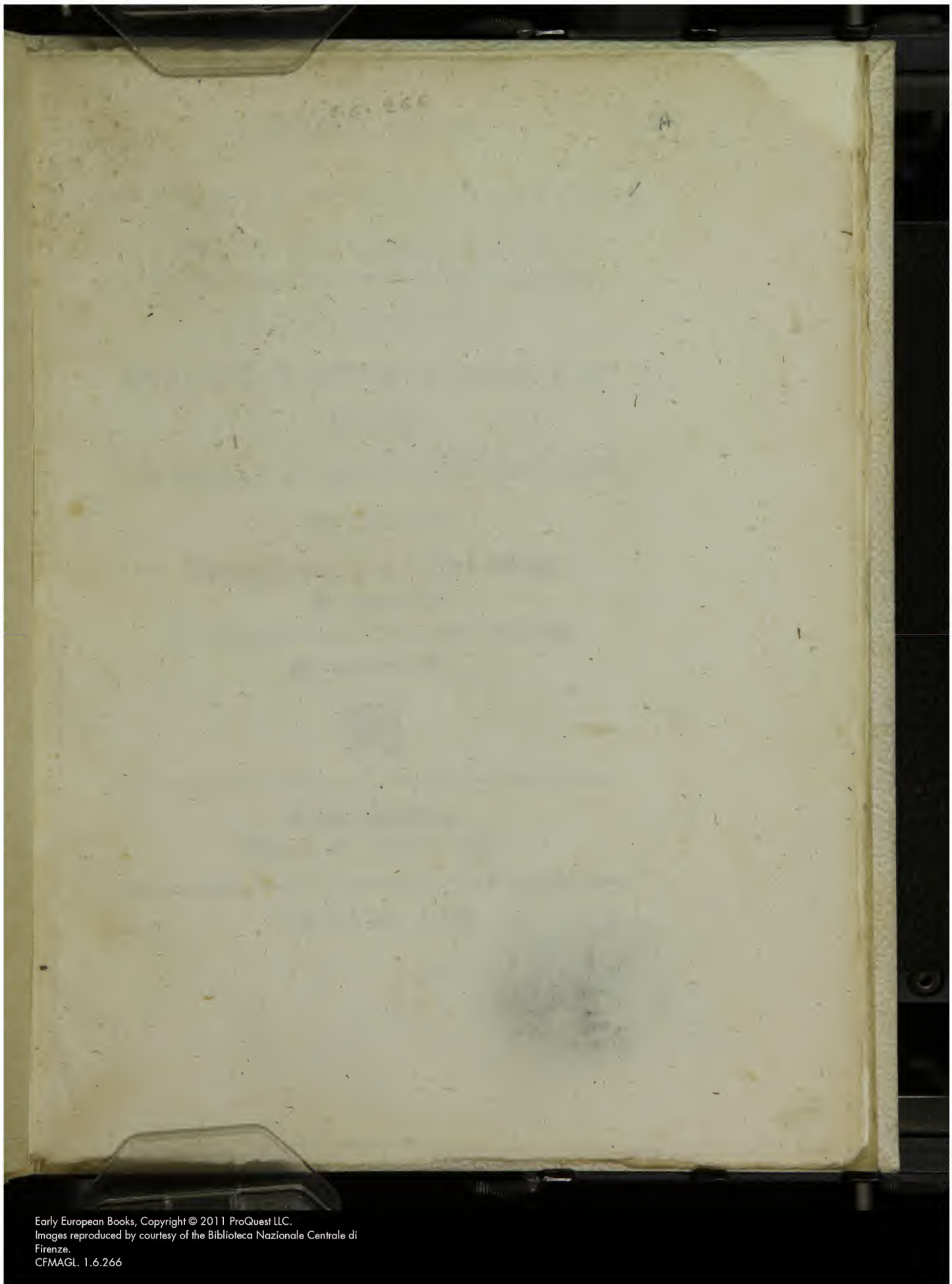














BE 1  
6  
266

MESOLABVM  
SEV  
DVÆ MEDIÆ PROPORTIONALES  
INTER EXTREMAS DATAS  
PER CIRCVLVM ET ELLIPSIM  
VEL HYPERBOLAM  
INFINITIS MODIS EXHIBITÆ

Accedit  
PROBLEMATVM QVORVMLIBET SOLIDORVM  
EFFECTIO

Per easdem curvas, jisdem modis.  
& appendix  
De eorundem solutione per circulum  
& parabolam.



---

Leodij Eburonum  
Typis I. F. VAN MIST.

---

CIC IDC LIX.





THE NATIONAL  
MUSEUM  
WASHINGTON  
D. C.  
DEPARTMENT OF THE INTERIOR  
BUREAU OF GEOLOGICAL SURVEY  
GEOLOGICAL SURVEY OF THE UNITED STATES  
WASHINGTON, D. C.

REPORT OF THE  
COMMISSIONER OF THE GEOLOGICAL SURVEY  
FOR THE YEAR 1896

BY  
JOHN W. COOK, CHIEF OF BUREAU  
AND  
JOHN W. COOK, CHIEF OF BUREAU  
AND  
JOHN W. COOK, CHIEF OF BUREAU

1.6.266

JOHN W. COOK, CHIEF OF BUREAU  
AND  
JOHN W. COOK, CHIEF OF BUREAU

WASHINGTON, D. C.

II  
LECTORI GEOMETRÆ

Auctor S. P. D.

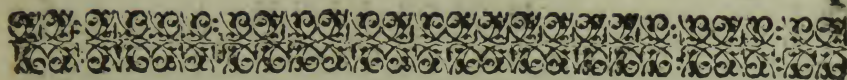
**P**roblematis non novi, nec incelebris effec-  
tionem tibi damus, Amice Lector, sed nobilis  
adeo & antiqui, vt consecrare audeat origi-  
nes suas, & ad oraculum referre. Quod siue *Vide Eutocij  
Com. in Ar-  
chim.*  
Delijs peste laborantibus, seu sepulchri, quod  
Glaucō parabatur, occasione redditum sit; siue  
etiam ea narratio, inter Græcas fabulas recen-  
senda est; parum interesse arbitror: satis enim  
claritatem suam tuetur, ex quo præstantissimi  
nunc & olim Geometræ, in eo solvendo non con-  
temnendam operam posuerunt. Itaque forsitan  
actum, quod aiunt, agere videbor, dum post tot  
Clarissimorum virorum conatus, eiusdem Proble-  
matis contemplationem rursus aggredior. Sed ni-  
hilominus aliquid superesse credidi, in quo non  
inutiliter exercerer, cum primum illius naturam  
pressius examinavi. Non quod ex eorum numero  
sim, qui rectâ & circulo illud construere inani la-  
bore contendunt: Sed quod viderem, illos etiam  
qui vel organicæ rationis, vel sectionum Conica-  
rum necessitatem agnovere, tam paucas nobiseius-  
dem



dem demonstrationes hæcenus ostendisse. Vix enim tot esse videntur, quot sæcula, ab eo quo proponi cœptum est, numeramus. Pauca omnino per circulum & Hyperbolam, vel parabolam; per circulū vero & Ellipsim, nulla, quod equidem sciam, hæcenus edita est. Quæ cum animo versarem, & otium nactus, ante aliquot annos in hanc curam incumberem, inveni non vnam, sed infinitas; neque id vice simplici, sed pluribus; & methodum secutus, quâ cœperam, omnia problemata solida, infinitis modis, per circulum & Ellipsim, vel Hyperbolam, pari felicitate construxi. Eius specimen hic habes, Amice lector, brevi libello conclusum; ut si forte reipsâ minus placeat, mole saltem displicere non possit. Methodum non adscripsi, tum quod gratius ac vtilius futurum arbitratus sum, si eam ipse privato studio, ex his specimenibus eliceres; tum etiam, quod iudicium tuum de totâ re prætolarer. Decrevi enim, si favor tuus accedat, non ipsam methodum tantum, sed & alia, quæ simul observavi, brevi, Deo bene iuvante, censuræ tuæ submittere. Vale.

MESOL:





## MESOLABVM

SEV

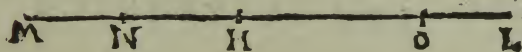
DVÆ MEDIÆ PROPORTIONALES INTER DATAS

PER CIRCVLVM ET ELLIPSIM

VEL HYPERBOLAM

INFINITIS MODIS EXHIBITÆ.

LEMMA PRIMVM



*I a rectâ ML, auferantur æquales NM, OL,  
 & inter N, & O, sumatur quodlibet punctum  
 H, Dico rectangulum MHL, minus rectangulo  
 MNL, æquale esse rectangulo MHO.*

Rectangulum enim MHL, æquatur duobus rectangulis  
 MN in HL, & NH in HL, sed rectangulum NH in HL,  
 est etiam æquale duobus rectangulis NH in HO, & NH in  
 OL; igitur rectangulum MHL, æquatur tribus rectangulis  
 MN in HL, NH in HO, & NH in OL (five NM, ex hypo-  
 thesi) hoc est duobus rectangulis NHO, LNM. Igitur, ablato  
 utrimque rectangulo MNL, rectangulum MHL, minus rec-  
 tangulo MNL, æquale erit rectangulo NHO. Quod erat  
 demonstrandum.







DEA, cum quadrato AE, æquatur quadrato EF, hoc est duobus rectangulis EFM, FEM; ablatis æqualibus DEA, EFM, remanebit quadratū AE, æquale rectangulo FEM, critque ut EM sive AC, ad EA, ita EA ad EF, sed cum ex hypothesi rectangulum DEA, sit æquale quadrato, EF, est ut EA, ad EF, ita EF, ad AD. Igitur ut AC, ad EA, ita EA, ad EF, & EF, ad AD Quod erat demonstrandum.

## PROPOSITIO PRIM A.

**I**nter extremas datas, duas rectas medio loco proportionales, per circulum & Ellipsem, infinitis modis, exhibere.

Sint extremæ datæ Z maior, X minor. Sumatur AD æqualis Z, eique ad rectos erigatur AC, æqualis X, & perficiatur rectangulum ACBD, circaque illud circulus ADF; Tum sumpto in AC (vel eadem versus C, quantumlibet producta) quolibet puncto P, ducatur PK, parallela AD, ad quam sit eadem AD, ut AP ad AC, completoque rectangulo APKI, dividantur rectæ PA, KI, bifariam in N, & O, & iuncta ON extendatur in L, ita ut rectangulum NLO, ad quadratum OK, eandem habeat rationem quam CA, ad AP; sumptaque NM in directum æquali OL, axe ML, describatur semi-ellipsis MFL, cuius applicatarum quadrata, eam habeant rationem ad rectangula sub partibus axis, quam habet AP, ad AC. transibit illa per P, & K, ex constructione, secabitque circulum, ut patet. sit punctum sectionis F, ex quo cadat in AD normalis FE, secans parallelas CB, PK, NO, in punctis Q, G, H.

Dico quatuor AD, EF, EA, AC, esse continuè proportionales.

Producatur EF, & fiat ut EG, ad EQ, ita EF, ad ER.

Nunc quadratum FH, ad quadratum PN, sive GH, est ut rectangulum LHM, ad rectangulum LNM, ob eam ipsam;





# MESOLABVM

5

DA, erit igitur, vt RE, ad FE, ita IA, ad DA, & dividendo, ac permutando, vt RF, ad ID, ita FE, ad DA: vt autem RF, ad ID, ita demonstrandum est esse AE, ad EF; itaque vt AE, ad FE, ita FE, ad DA. Igitur rectangulum DAE æquale est quadrato EF. & consequenter \* quatuor DA, F <sup>\* plenum;</sup> E, AE, EQ vel AC, sunt in continuâ proportionē. Quod 3. erat demonstrandum.

Si punctum P supra C, in AC productâ foret acceptum, non absimilis esset demonstratio, quod monuisse sufficiat, cum nullo negotio sese oblatura sit consideranti.

Ex quo evidens est, cum punctum P possit ubique in lineâ AC, etiam in infinitum productâ, sumi Ellipses infinitas specie differentes satisfacere proposito.

Construximus itaque Problema per circulum & ellipsim infinitis modis. Quod erat faciendum.

## Corollarium

Patet etiam methodus idem problema solvendi per duas Ellipses, cum enim quælibet earum quas superiori descriptione complexi sumus, secet circulum in puncto F, sequitur duas quælibet in eodem puncto sese interfecare.

# LEMMA QVARTVM



SI a rectâ IO, auferantur æquales IK, OL, & in eâdem productâ sumatur quodlibet punctum Q, Dico rectangulum KQL, minus rectangulo KOL, æquari rectangulo IQO.

Bisecetur IO in V. Itaque rectangulum KQL, vna cum quadrato VL, erit æquale quadrato VQ. sed quadratum VQ

A3

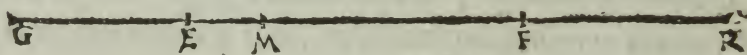


6

## MESOLABVM

similiter est æquale rectangulo  $IQQ$ , vna cum quadrato  $VO$ , & quadratum  $VO$ , est pariter æquale rectangulo  $KOL$ , vna cum quadrato  $VL$ : Igitur rectangulum  $KQL$ , vna cum quadrato  $VL$ , æquale erit rectangulis  $IQQ$ ,  $KOL$ , cum quadrato  $VL$ , & ablati vtrimque rectangulo  $KOL$ , & quadrato  $VL$ ; rectangulum  $KQL$ , minus rectangulo  $KOL$ , æquabitur rectangulo  $IQQ$ . Quod erat demonstrandum.

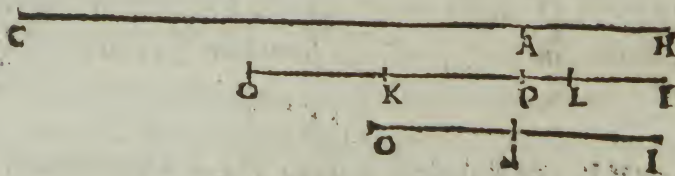
## LEMMA QVINTVM



**I**N rectâ  $GR$ , sumptis tribus punctis  $E, M, F$ , si fuerit ut  $GE$ , ad  $EM$ , ita  $EF$ , ad  $FR$ , erit ut  $GE$ , ad  $EM$ , ita rectangulum  $GFE$ , ad duo rectangula  $EFR, FEM$ .

Cum enim sit ut  $GE$ , ad  $EM$ , ita  $EF$ , ad  $FR$ ; erit permutando & componendo &, ut  $GE$  cum  $EF$ , sive  $GF$ , ad  $EF$ , ita  $ME$  cum  $FR$ , ad  $FR$ . Et rursus permutando, ut  $GF$ , ad  $ME$  cum  $FR$ , ita  $FE$ , ad  $FR$ ; hoc est  $GE$  ad  $EM$ , ex hypothesi. sed ut  $GF$ , ad  $ME$  cum  $FR$ , ita (sumptâ communi altitudine  $EF$ ) rectangulum  $GFE$ , ad duo rectangula  $MFE, RFE$ . Igitur ut  $GE$ , ad  $EM$ , ita rectangulum  $GFE$ , ad duo rectangula  $MEF, RFE$ . Quod erat &c.

## LEMMA SEXTVM

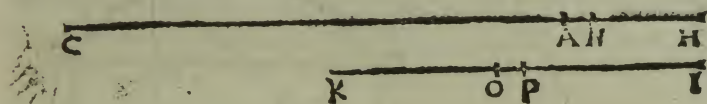




**S**I fuerint duæ rectæ, CH secta utcumque in A, & altera OI, vel æqualis mediæ inter CA, & AH, vel maior quam mediæ, Dico primo OI ita posse secari in L, ut eadem sit ratio rectanguli OLI, ad quadratum dimidiæ AH, quæ est CA, ad AH.

Sit enim æqualis mediæ, & secetur bifariam in L. Cum sit ut CA, ad OI, ita OI, ad AH, erit ut CA, ad AH, ita quadratum OI, ad quadratum AH, & sumptis subquadruplis, ita rectangulum OLI ad quadratum dimidiæ AH. Quod erat &c.

Sit deinde maior, & ex illâ refecetur IK æquales mediæ inter CA & AH, quæ bifariam secetur in P. patet ita esse quadratum PI ad quadratum dimidiæ AH, ut CA, ad AH. Itaque faciendum est rectangulum OLI, æquale quadrato PI, quod quidem fieri poterit, cum IP sit minor dimidiâ OI, ex hypothesi. Quod &c.



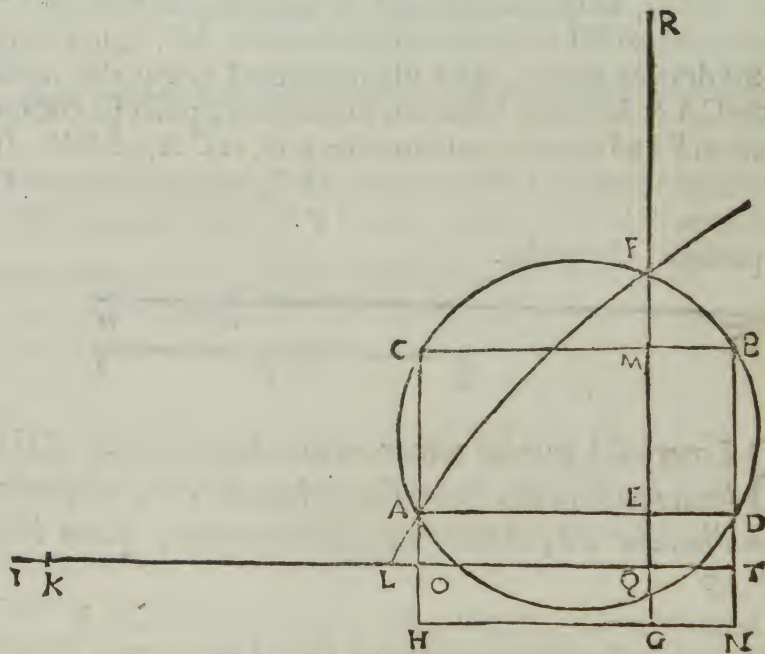
**S**I vero OI fuerint minor mediâ. Dico secundo AH ita secari posse in N, ut rectangulum ANH, ad quadratum dimidiæ OI, habeat eandem rationem, quam HA, ad AC.

Sumptâ enim, ut prius, IK, mediâ maiori OI, & divisâ bifariam in P, fiat ut quadratum PK ad quadratum dimidiæ OI, ita quadratum dimidiæ AH ad rectangulum ANH, quod quidem fieri poterit cum KI ponatur maior OI, ideoque rectangulum ANH futurum sit minus quadrato dimidiæ AH. Igitur erit permutando ut quadratum PK, ad quadratum dimidiæ AH, ita quadratum dimidiæ OI, ad rectangulum ANH. sed ut quadratum PK, ad quadratum dimidiæ AH, ita quadratum IK, ad quadratum AH, sive CA, ad AH.

Igitur ut  $CA$ , ad  $AH$ , ita quadratum dimidię  $OL$ , ad rectangulum  $ANH$ , five convertendo ut  $AH$ , ad  $CA$ , ita rectangulum  $ANH$ , ad quadratum, dimidię  $OI$ , Quod erat &c.

PROPOSITIO SECVNDA

**P**ropositum sit easdem rectas, per circulum & Hyperbolam, infinitis modis exhibere.



Sit, vt prius, circa rectangulum ex datis rectis AD, AC, circulus AFD; producatâque CA vtcumque in H, perficiatur rectangulum HADN, & diuisis AH; DN, bifariam in O, & T, iungatur TO, & producat in I, itavt sit eadem ratio T O ad OI, quæ HA, ad AC. Erit igitur OI, vel maior mediâ inter



MESOLABVM

9

inter CA, AH vel æqualis mediæ vel minor. Sit primo maior, & secetur IO in L, itavt rectangulum ILO, ad quadratum AO, eandem habeat rationem, quæ est CA, ad AH ( id enim fieri poterit \* ) sumptatque IK, æquali LO, axe KT, latere transverso KL, recto vero, quod sit ad KL, sicut HA ad AC, describatur ex L vertice, semi-hyperbola LAF, transibit illa per A, ex constructione & secabit circulum. secet in puncto F: ex quo cadat in HN normalis FG secans parallelas CB, AE, OT, in punctis M, E, Q.

\* p. lemma  
6. una

Dico quatuor. DA, EE, EA, AC, esse continue proportionales.

Fiat vt GE, ad EM, ita EF, ad FR.

Itaque ob hyperbolam, vt quadratum FQ, ad quadratum AO, ita rectangulum KQL, ad rectangulum KOL, & dividendo, vt quadratum FQ, minus quadrato AO, sive QE ( hoc est vt rectangulum GFE ) ad quadratum AO, ita rectangulum KQL, minus rectangulo KOL ( hoc est, ita rectangulum IQQ \*) ad rectangulum KOL: & permutando, vt rectangulum GFE, ad rectangulum IQQ, ita quadratum AO, ad rectangulum KOL, sive latus rectum, ad transversum, vel, ex constructione, HA ad AC. sed vt HA, ad AC, sive GE, ad EM, ita rectangulum GFE ad duo rectangula MEF RFE \*, Igitur vt rectangulum GEF ad rectangulum IQQ ita rectangulum GFE ad duo rectangula MEF, RFE, & permutando. Sunt itaque æqualia, rectangulum IQQ, & duo rectangula MEF, RFE, sed sunt etiam æqualia, ob circulum rectangula EFM & DEA sive TOQ: Igitur additis æqualibus, tria rectangula MEF, RFE, EFM, æqualia erunt duobus IQQ, TOQ. sed tria rectangula MEF, RFE, EFM, æqualia sunt vnico REF, duo vero IQQ, TOQ æqualia sunt rectangulo sub IT & OQ; Igitur rectangulum REF, æquale erit rectangulo sub IT & OQ, eritque vt IE, ad RE, ita EF, ad OQ.

p. lemma  
4.

p. lemma  
5.

B



Nunc, ex constructione, est vt  $OT$ , ad  $OI$ , ita  $HA$ , ad  $A$   
 $C$ , sive  $GE$  ad  $EM$ , vel  $EF$  ad  $FR$ . Igitur componendo &  
 per conversionem rationis erit vt  $IT$ , ad  $TO$ , ita  $RE$ , ad  $EF$ ,  
 & permutando vt  $IT$ , ad  $RE$ , ita  $TO$ , ad  $EF$ . sed ante de-  
 monstratum est esse vt  $IT$ , ad  $RE$ , ita  $EF$ , ad  $OQ$ ; erit itaque  
 vt  $TO$ , ad  $EF$ , ita  $EF$ , ad  $OQ$  & quadratum  $FE$ , æquabitur  
 rectangulo  $TOQ$ , sive  $DAE$ . Igitur quatuor  $DA$ ,  $EF$ ,  $AE$ ,

\* p lemm: AC erunt in continuâ analogiâ. Quod erat demonstnan-  
 dum. 3.um

Si  $OI$  esset æqualis mediæ inter  $CA$  &  $AH$ , tunc bisecan-  
 da foret  $OI$ , & ex puncto bisectionis, ducenda per  $A$ , recta que  
 utique circulo occurreret in puncto  $F$ , quesito, vt facile of-  
 tenditur, sed nec tanto molimine opus esset, si in punctum  $H$   
 felici casu incidisses, tunc enim ipsæ  $CA$ ,  $OI$ ,  $AH$ ,  $OT$ ,  
 vel  $DA$  essent continue proportionales. Ut patet.

Sit nunc  $OI$  minor quam media. Secetur bifariam in  $P$ , &  
 $AH$ , in  $N$ , itavt sit eadem ratio rectanguli  $HNA$ , ad qua-  
 dratum  $PO$ , que  $HA$ , ad  $AC$  (hoc enim rursus fieri poterit) Tum in puncto  $P$ , erigantur vtrunque  $PL$ ,  $PK$ , æquales  $ON$ ,  
 & perficiatur rectangulum  $AHVT$ , itemque  $AOIY$ . Deinde  
 axe  $LT$ , vertice  $L$ , latere transverso  $KL$ , describatur semi-  
 hyperbole  $LAF$ , cuius latus transversum ad rectum, eam  
 habeat rationem quam  $HA$ , ad  $AC$ , transibit illa per  $A$ , cum  
 rectangulum  $HNA$ , sive  $KTL$ , ad quadratum  $OP$ , sive  $AT$ ,  
 eandem habeat rationem quam  $HA$  ad  $AC$  (ex construc-  
 tione;) secabit etiam circulum in puncto  $F$ , ex quo demissa  
 normalis  $FE$ , in  $AD$ , occurrat  $CB$ , in  $M$ , & productis  $PO$ ,  
 $VH$ , in  $Q$ , &  $G$ ,

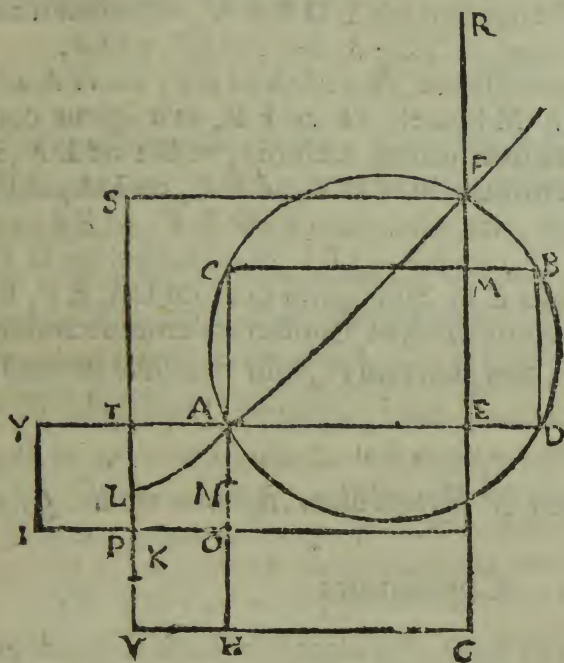
Dico quatuor  $DA$ ,  $EF$ ,  $EA$ ,  $AC$ , rursus esse continue  
 proportionales,

Productâ  $EF$ , fiat vt  $GE$ , ad  $EM$ , ita  $EF$ , ad  $FR$ , & appli-  
 cetur  $FS$ , ad axem hyperbolæ:

Nunc

## 11

gulum  $KTL$ ,  
& dividendo  
quadratum  $T$   
 $E$ , minus qua-  
drato  $TA$  (hoc  
est rectangu-  
lum  $YEA$ ) ad  
quadratum  $T$   
 $A$ , erit vt rec-  
tangulum  $KS$   
 $L$  minus rec-  
tangulo  $KTL$   
(hoc est vt rec-  
tangulum  $VST$   
 $*$ ) ad rec-  
tangulum  $KT$   
 $L$ , & permutando, vt rec-  
tangulum  $YEA$ , ad rectan-  
gulum  $VST$ ,  
ita quadratum  
 $TA$ , ad rec-



B 2

Cum



cum rectangulo  $DFA$ , æquale erit tribus rectangulis  $MEF$ ,  $RFE$ ,  $EFM$ . Sed duo rectangula  $YEA$ ,  $DEA$ , æqualia sunt vnico sub  $YD$ , &  $EA$ , tria vero  $MEF$ ,  $RFE$ ,  $EFM$ , vnico  $REF$ ; Igitur rectangulum sub  $YD$  &  $EA$ , æquale erit rectangulo  $REF$ ; eritque vt  $YD$ , ad  $RE$ , ita  $EF$ , ad  $EA$ .

Rursus, ex constructione, est vt  $DA$  ad  $AY$ , ita  $HA$  ad  $AC$ , siue  $GE$  ad  $EM$  hoc est  $EF$  ad  $FR$ , erit igitur componendo, & per conversionem rationis, vt  $DY$  ad  $DA$ , ita  $ER$ , ad  $EF$ , & permutando vt  $DY$ , ad  $ER$ , ita  $DA$ , ad  $FR$ . Sed vt  $DY$ , ad  $ER$ , ita ostensum est esse  $EF$ , ad  $EA$ ; erit itaque vt  $DA$ , ad  $EF$ , ita  $EF$ , ad  $EA$ , & rectangulum  $DAE$  æquabitur quadrato  $EF$ . Sunt igitur quatuor  $DA$ ,  $EF$ ,  $EA$ ,  $AC$ , continue proportionales. Quod erat demonstrandum.

*p. lemm.*  
a.

Vnde sequitur, cum punctum  $H$  possit ubilibet in rectâ  $CA$ , indefinitè productâ sumi; infinitas Hyperbolas specie differentes, satisfacere proposito. Construximus itaque Problema per circulum & Hyperbolam infinitis modis. Quod erat faciendum.

#### Corollarium

**H**inc evidens est methodus idem Problema solvendi per duas Hyberbolas, vel per Ellipsim & Hyperbolam infinitis modis. Cum enim Ellipses & Hyperbolæ expresscripto constructionum præcedentium descriptæ, omnes secant circulum in  $F$ , patet duas quaslibet in eodem puncto sese interfecare.

## MONITVM

**E**T hactenus quidem constructiones per infinitas Ellipses, vel Hyperbolas, vt propositum erat, absoluimus. Ad-  
demus nunc particulares aliquot eiusdem Problemat is effec-  
tion es



riones, quas magis uniuersales reddere poterit, qui tanti  
esse putaverit, methodum quâ supra usi sumus, in his  
etiam experiri. Sit itaque

## LEMMA SEPTIMVM

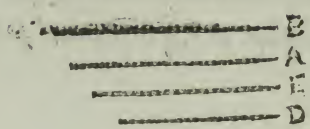
**S**I fuerint quatuor rectæ, sitque ratio primæ maioris ad  
secundam, eadem quæ differentie secundæ & tertiæ, ad  
differentiam tertiæ & quartæ. Sit item ut secunda ad ter-  
tiam, ita differentia primæ & tertiæ, ad differentiam  
secundæ & quartæ: erunt illæ continue proportionales.

Habeant quatuor rectæ B, A, E, D conditiones lemmatis.

Dico illas esse continue proportionales.

Cum enim sit, ex hypothese, ut B, ad A; ita A minus E, ad  
E minus D, erit permutando & componendo, ut B cum A  
minus E, ad A minus E, ita A cum E minus D, ad E minus  
D, & rursus permutando, ut B cum A minus E, ad E cum A  
minus D, ita A minus E, ad E minus D, hoc est B, ad A, ex-  
hypothese. Vltcrius cum, ex eadem, sit ut A, ad E, ita B  
minus E, ad A minus D, erit permutando, & componendo,  
ut A cum B minus E, ad B minus E, ita E cum A minus D,  
ad A minus D, & rursus permutando, ut A cum B minus E,  
ad E cum A minus D, ita B minus E, ad A minus D, sed ut  
A cum B minus E, ad E cum A minus D, ita ostensum est  
esse B, ad A, Igitur ut B, ad A, ita B minus E, ad A minus  
D, hoc est A, ad E ex hypothese. Sunt igitur tres proportio-  
nales B, A, E.

Nunc cum sit ut B, ad A, ita A minus E, ad E minus D,  
erit ut A, ad E, ita A minus E, ad E minus D, & permutando  
& dividendo, ut E, ad A minus E, ita D, ad E minus D, &  
rursus permutando, ut E, ad D, ita A minus E, ad E minus  
D,


 D, hoc est A, ad E, ex ostensis. Tres igitur A, E, D, sunt etiam in continuâ proportionē, & consequenter quatuor BA ED sunt continue proportionales. Quod erat demonstrandum.

## PROPOSITIO TERTIA

*Inter extremas datas duas medio loco proportionales invenire.*

Sint datae rectae AB maior, AD minor, & ex illis, ut prius, rectangulum ABCD, circa quod descriptus intelligatur circulus. Tum producta BA in I, donec AI sit quadrupla AB, secetur AB in H, itaut rectangulum IHA, sit æquale quadruplo rectanguli ABCD: & sumpta IR æquali AH, erectaque HK dimidia AH, iungatur KA, & producatu donec occurrat normali RG in G. Tum latere transverso GK, vertice K, latere vero recto transversi subquintuplo describatur Semi hyberbole EK, cuius applicatae ad diametrum KC, sint parallelæ KH. Illa utique secabit circulum. Secet in puncto F, ex quo applicetur FO, ac producatu donec occurrat AB in Q; occurret etiam DC in X.

Dico quatuor BA, QF, QA, AD, esse continue proportionales.

Rectangulum enim GOK, ad rectangulum RQH, rationem habet compositam ex ratione GO, ad RQ (sive ob similitudinem triangulorum ARG, OAQ, KAH) ex ratione KA, ad AH, & ex ratione OK, ad HQ, hoc est eiusdem KA ad eandem AH. hæc vero duæ rationes, componunt rationem quadrati KA, ad quadratum AH. Igitur ut quadratum

tum







tum  $AK$  ad quadratum  $AH$ , ita rectangulum  $GOK$  ad rectangulum  $RQH$ . Sed cum  $AH$  sit dupla  $HK$ , erit quadratum  $AH$ , quadruplum quadrati  $HK$ , & consequenter quadratum  $AK$ , quod æquale est vtrique  $AH$ ,  $HK$ , erit sesquiquartum quadrati  $AH$ ; Igitur rectangulum  $GOK$  erit etiam sesquiquartum rectanguli  $RQH$  sive vt 5 ad 4. Idem autem rectangulum  $GOK$ , ad quadrum  $OF$ , est vt latustransuersum ad rectum, sive vt 5 ad 1, ex constructione; Igitur rectangulum  $GQH$ , ad quadratum  $O$  ferit vt 4 ad 1. Sed rectangulum  $RQH$ , est æquale rectangulo  $IQA$ , minus rectangulo  $IHA$ . \* Itaque rectangulum  $IQA$  sive  $IAQ$  cum quadrato  $AQ$ , minus rectangulo  $IHA$ , erit quadruplum quadrati  $OF$ . Sed rectangulum  $IQA$ , quadruplum est rectanguli  $BAQ$  ex constructione, cum  $AI$  posita sit quadrupla  $BA$ ; & quadratum  $AQ$ , quadruplum est quadrati  $QO$ , cum  $AQ$  sit eiusdem dupla, sive vt  $AH$  ad  $HK$ , similiter rectangulum  $IHA$  quadruplum est rectanguli  $ABCD$ , ex constructione. Igitur additis & demptis partibus in eadem ratione, rectangulum  $IQA$ , cum quadrato  $AQ$ , minus rectangulo  $IHA$ , quadrupla erunt rectanguli  $BAQ$ , cum quadrato  $QO$ , minus rectangulo  $ABCD$ . Cum autem ostensum sit rectangulum  $IQA$  cum quadrato  $AQ$  minus rectangulo  $IHA$ , quadruplū etiam esse quadrati  $OF$ , sequitur rectangulum  $BAQ$ , cum quadrato  $QO$ , minus rectangulo  $ABCD$ , æquale esse eidem quadrato  $OF$ . Sed quadratum  $OF$ , æquale est duobus quadratis  $FQ$ ,  $OQ$ , minus rectangulo sub  $FQ$  & dupla  $OQ$ , hoc est minus rectangulo  $FQA$ ; Igitur ablato vtriusque quadrato  $OQ$ , rectangulum  $BAQ$ , minus rectangulo  $ABCD$ , æquale erit quadrato  $FQ$ , minus rectangulo  $FQA$ . Est autem rectangulum  $BAQ$  minus rectangulo  $ABCD$ , æquale rectangulo sub  $AB$ , &  $AQ$  minus  $CD$ ; quadratum vero  $FQ$  minus rectangulo  $EQA$ , æquatur rectangulo ex  $FQ$ , in  $FQ$  minus  $AQ$ , erit igitur vt  $BA$ , ad  $QF$ , ita  $FQ$  minus  $AQ$  ad  $AQ$  minus.

\* p. lemm.  
4. tum.



AD. Sed cum rectangulum BQA, sit æquale rectangulo QFX (ob circulum) est etiam vt QF, ad QA, ita BQ five BA minus AQ ad FX, ( five FQ minus OX, vel AB.) Igitur quatuor rectæ BA, QF, QA, AD, habent conditiones lemmatis septimi, suntque continue proportionales. Quod erat demonstrandum.

## LEMMA OCTAVVM

*Si fuerint quatuor rectæ B, A, E, D, fueritque vt B, ad A, ita E, ad D, & vt A, ad E, ita B minus E, ad A minus D, erunt ille in continuâ analogiâ.*

CVmenim sit vt B, ad A, ita E, ad D, erit permutando & dividendo vt B minus E, ad E, ita A minus D, ad D, & rursus permutando, vt B minus E, ad A minus D, ita E, ad D. Sed vt B minus E, ad A minus D, ita etiam est exhypothesi A, ad E: Igitur vt A,

ad E, ita E, ad D, est autem pariter exhypothesi vt E, ad D, ita B ad A; itaque vt B ad A, ita A, ad E, & E, ad D. Quod erat demonstrandum.

## PROPOSITIO QVARTA.

*Cubum cubi duplum invenire, siue inter extremas datas in ratione duplâ duas medioloco proportionales exhibere.*

SInt datæ rectæ AB, eiusdemque dupla BC. & facto ex ijs rectangulo ABCD, descriptoque circa illud circulo, dividantur AB, BC, bifariam in M & P, & iungatur PM occurrens DA, productæ in I, & IQ producat in directum, donec eidem sit æqualis PA. Tum ad IH, productâ DC in

C

N;



N; fiat Ellipsis cuius diameter sit IH, vna applicatarum DN, quæ vtique secabit circulum, secet in E, ex quo cadat normalis EF. Dico quatuor DA, EF, FB, BA, esse in continuâ proportionē.

Cadat ex H normalis HK in AD productam, & ducatur MO, parallela BC, occurrens EF in O, & ad MO ducatur PQ, parallela AB, tum producatu EF, donec occurrat IH, in G, erit GF applicata ad diametrum IH, ex constructione,

Patet nunc, cum anguli ad A & B, sint recti & Anguli, IMA, BMP, æquales, triângula IAM, BPM, esse æquiangula, Cum vero BM, sit æqualis MA, rectas BP, IA, fore etiam æquales. Patet etiam ob eandem rationem, triangulum PCN, esse æquiangulum triangulo PBM, & cum PB, PC, sint æquales ex constructione, CN, æquari BM, & PM ipsi PN, cum vero æquales sint etiam IP, PH, demptis æqualibus PM, PN, remanere æquales IM, AN. Cum autem sit vt IM ad NH, ita IA, ad DK (ob parallelas AM, DN, KH) sequitur rectas AI, DK, etiam esse æquales, & cum AI, sit dupla AM, erit etiam ID, dupla DN, IL dupla IG, & MO dupla OG.

Nunc, vt quadratum DN ad quadratum EG, ita rectangulum INH, ad rectangulum IG H (ob ellipsim) Ratio vero rectanguli INH, ad rectangulum IG H, componitur ex ratione NI, ad IG (sive DI, ad IL) & ex ratione HN ad HG (sive KD, ad KL) hæc verò duæ rationes, componunt rationem rectanguli KDI, ad rectangulum KLI; Igitur vt quadratum DN, ad quadratum EG, ita rectangulum KDI, ad rectangulum KLI, & permutando vt quadratum ND, ad rectangulum KDI, ita quadratum EG, ad rectangulum KLI.

Rursus ratio quadrati DN, ad rectangulum KDI, componitur ex ratione DN, ad DI, siue 1 ad 2, & ex ratione eiusdem DN ad DK sive DC, hoc est 3 ad 2, ex his vero rationibus componitur ratio 3 ad 4; Igitur vt 3, ad 4, ita quadratum

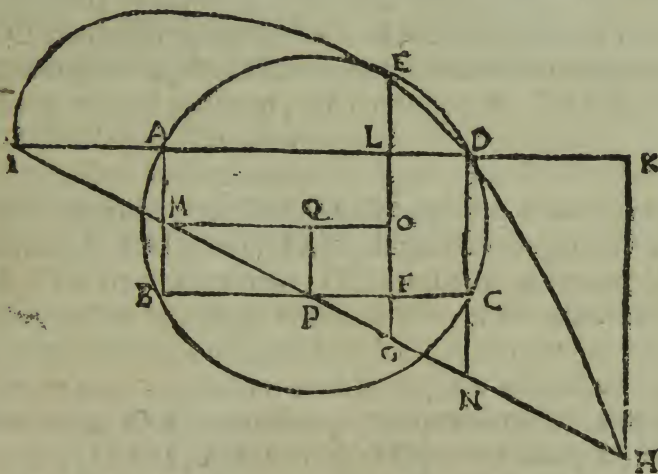
tum



tum DN, ad rectangulum IDK, hoc est ita quadratum EG, ad rectangulum ILK. Tria igitur rectangula ILK, æquantur quatuor quadratis EG.

Uterius cum rectangulum IKL, sit æquale duobus rectangulis DLA, KDI \*) tria rectangula ILK, æqualia erunt

\* p. lemma  
p. 111.



tribus rectangulis DLA, vna cum tribus KDI. Sed cum DI sit tripla KD, rectangulum KDI, erit æquale triplo quadrato KD, (five AB) & triplum rectangulum KDI, 9 quadratis AB, hoc est, cum CB sit dupla BA, quatuor rectangulis DABC, cum quadrato AB: Igitur tria rectangula ILK, æqualia erunt tribus rectangulis DLA, vna cum quatuor rectangulis DABC, & quadrato BA. At cum tria rectangula ILK, ostensa sint æqualia quatuor quadratis EG, sequitur tria rectangula DLA, vna cum quatuor rectangulis DABC, & quadrato BA, equalia esse eidem quadrato EG quater sumpto. Sed quadratum EG, æquatur quadratis GO, & OE, cum rectangulo GOEb, hoc est cum vnico MOE; Igitur quadruplum quadratum EG, æquabitur quatuor quadratis GO (five vnico quadrato MO) cum quatuor quadratis OB,

C 2

& qua-



tuor rectangulis MOE. Quatuor vero rectangula MOE, æqualia sunt quatuor rectangulis MO, five BF, in FE, minus quatuor rectangulis MOF, hoc est (cum MO sit æqualis AL, & AD quadrupla OF, ex constructione) minus rectangulo DAL. Igitur quatuor quadrata EG, æqualia erunt quatuor quadratis EO, cum quadrato MO, & quatuor rectangulis BFE, minus rectangulo DAL. Sed quatuor quadrata EG, ostensa sunt æqualia tribus rectangulis DLA, cum quatuor rectangulis DABC, & quadrato AB, quatuor itaque quadrata EO, cum quadrato MO, & quatuor rectangulis BFE, minus rectangulo DAL, æqualia erunt tribus rectangulis DLA, cum quatuor rectangulis DABC, & quadrato AB. Et addito vtrimque rectangulo DAL, (five DLA, cum quadrato LA), quatuor quadrata EO, cum quadrato MO, & quatuor rectangulis BFE, æquabuntur quatuor rectangulis DLA, cum quadrato LA, five MO, & quatuor rectangulis DABC, cum quadrato AB, & ablato vtrimque quadrato MO, ac sumptis subquadruplis, quadratum EO cum rectangulo BFE, æquale erit rectangulis DLA, DABC, cum quartâ parte quadrati AB (hoc est cum quadrato OF). Sed rectangulum DLA, æquale est rectangulo FEL, ob circum, rectangulum vero FEL, cum quadrato OF, æquale est quadrato EO. Igitur quadratum EO, cum rectangulo BFE, æquale erit rectangulo DABC, cum quadrato EO; & ablato vtrimque quadrato EO, remanebit rectangulum BFE, æquale rectangulo ABCD; eritque vt CB, ad EF, ita FB, ad BA, five FL.

Sed cum rectangulum CFB, sit æquale rectangulo FEL, (ob circum) est etiam vt EF ad FB, ita CF (five CB minus BF (ad EL (five EF minus FL); Quatuor igitur rectæ CB, EF, FB, FL habent conditiones lemmatis octavi. Sunt igitur in continuâ proportionem, & consequenter etiam ipsæ æquales DA, EF, FB, BA. Quod erat demonstrandum.

LEM

## LEMMA NONVM

*In quatuor rectis B, A, E, D, si fuerit ut prima cum secundâ, ad secundam cum tertiâ, ita tertia ad quartam. Utriusque ut prima minus tertiâ, ad secundam minus quartâ, ita secunda ad tertiam, erunt illæ in continuâ analogiâ.*

Cum enim sit ut B cum A, ad A cum E, ita E, ad D, ex hypothesi, erit permutando, & dividendo, ut B cum A minus E, ad E, ita A cum E minus D, ad D, & rursus permutando, ut B cum A minus E, ad A cum E minus D, ita E, ad D.

Uterius, cum sit etiam ex hypothesi, ut B minus E, ad A minus D, ita A, ad E, erit permutando, & componendo, ut

_____ B	B minus E cum A, ad A, ita
_____ A	A minus D cum E, ad E, &
_____ E	rursus permutando, ut B mi-
_____ D	nus E cum A, ad A minus
	D cum E, ita A ad E. Sed ut
	B cum A minus E, ad A cum

E minus D, ita ostensum est esse E, ad D; igitur ut A, ad E, ita E, ad D.

Nunc ex hypothesi, est ut B cum A, ad A cum E, ita E, ad D, erit igitur ut B cum A, ad A cum E, ita A, ad E: & permutando, ac dividendo, ut B, ad A, ita A, ad E, sed ut A, ad E, ita est etiam E, ad D. Quatuor igitur B, A, E, D, sunt in continuâ proportionem. Quod erat demonstrandum.

## PROPOSITIO QUINTA

*Inter extremas datas duas medio loco proportionales inveniri.*

C 3

data



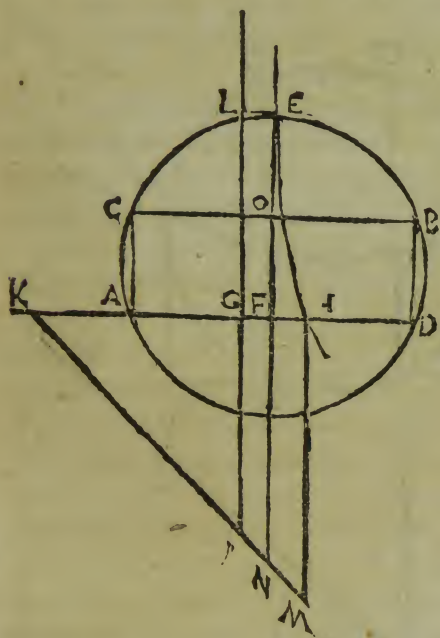
**D**atæ sint extremæ  $AB$ , maior  $AC$ , minor, & ex illis, vt prius rectangulum  $ACBD$ , & circa illud circulus. Secetur  $AD$ , in  $G$ , itavt  $AG$ , sit æqualis  $AC$ , productaque  $DA$ , in  $K$ , donec  $AK$ , sit æqualis  $AG$ , fiat  $GI$ , normalis ad  $AD$ , æqualis  $GK$ , quæ versus  $G$  indefinitè producat, tum iuncta  $KI$ , & producta etiam indefinitè a parte  $I$ , vt in  $M$ ; sumatur in  $AD$ , recta  $AH$ , media proportionalis inter  $DA$ ,  $GA$  vel  $AC$ , & circa asymptotos  $GI$ ,  $IM$ , describatur Hyperbola transiens per punctum  $H$ , quæ secabit circulum a parte  $G$ , vt patet, secet in puncto  $E$ ; ex quo cadat in  $AD$ , normalis  $EF$ , secans  $CB$ , in  $O$ .

Dico quatuor  $DA$ ,  $EF$ ,  $FA$ ,  $AC$ , esse continue proportionales.

Producatur  $EF$ , ad  $KI$ , in  $N$ , & eidem parallela ducatur  $HM$ : Tum ex puncto  $E$ , in  $IG$  productam, cadat normalis  $EL$ , quæ utique erit parallela & æqualis  $FG$ : & cum  $K$   $G$   $GI$ , sint æquales, ex constructione, erunt etiam æquales  $KF$ ,  $FN$ , &  $KH$ ,  $HM$ .

Nunc, cum duo puncta  $H$ , &  $E$ , sint in Hyperbolâ, ductæque sint ad asymptotos parallelæ  $HG$ ,  $EL$ , itemque  $HM$ ,  $EN$ , erit rectangulum  $MHG$ , æquale rectangulo  $NEL$ . Sed rectangulum  $MHG$ , est æquale rectangulo  $KHG$ , rectangulum vero  $NEL$ , est æquale rectangulo  $NFG$  (sive  $KFG$ ,) una cum rectangulo  $EFG$ . Igitur rectangulum  $KHG$ , est æquale rectangulis  $KFG$ ,  $EFG$ . Et addito utrimque quadrato  $GA$ , rectangulum  $KHG$ , cum quadrato  $GA$ , erit equalæ rectangulis  $KFG$ ,  $EFG$ , cum quadrato  $GA$ . Sed rectangulum  $KHG$  cum quadrato  $GA$ , æquale est quadrato  $AH$ , & rectangulum  $KFG$  cum quadrato  $GA$ , similiter est æquale quadrato  $AF$ ; Itaque quadratum  $AH$ , erit equalè quadrato  $AF$ , cum rectangulo  $EFG$ , & cum  $AH$ , ex constructione, sit media inter  $DA$ ,  $AC$ , ideoque eius quadratum æquale sit rectangulo  $ACBD$ ; sequitur rectangulum  $ACBD$ , æquale esse qua-

quadrato  $AF$ , & rectangulo  $EFG$ : & addito vtrunque rectangulo  $AGL$ , rectangulum  $ACBD$  cum rectangulo  $AGL$ , fore æquale quadrato  $AF$ , cum rectangulis  $AGL$ ,  $EFG$ ,



hoc est cum unico rectangulo  $AFE$ . Sed cum  $AG$ , sit æqualis  $AC$ , ex constructione, rectangulum  $ACBD$ , vna cum rectangulo  $AGL$ , æquale erit rectangulo ex  $AC$  in  $AD$ , cum  $GL$  sive  $FE$ , & similiter quadratum  $A$   $F$  cum rectangulo  $AFE$ , æquale erit rectangulo ex  $AF$ , in  $AF$  vna cum  $EF$ . Igitur rectangulum ex  $AC$ , in  $AD$  cum  $FE$ , æquale erit rectangulo ex  $AF$ , in  $AF$  cum  $FE$ , & consequenter erit eadem ratio  $DA$  cum  $F$   $E$ , ad  $FE$  cum  $AF$ , quæ

est  $AF$ , ad  $AC$ .

Sed cum rectangulum  $DF A$ , sit æquale rectangulo  $FE O$ , (ob circulum) est etiam vt  $DF$  (sive  $DA$  minus  $AF$ ) ad  $EO$  (sive  $FE$  minus  $FO$  vel  $AC$ ) ita  $EF$ , ad  $FA$ . Invenimus igitur in quatuor rectis  $DA$ ,  $EF$ ,  $FA$ ,  $AC$ , conditiones lemma-  
is 9. Sunt itaque continue proportionales. Quod erat de-  
monstrandum.

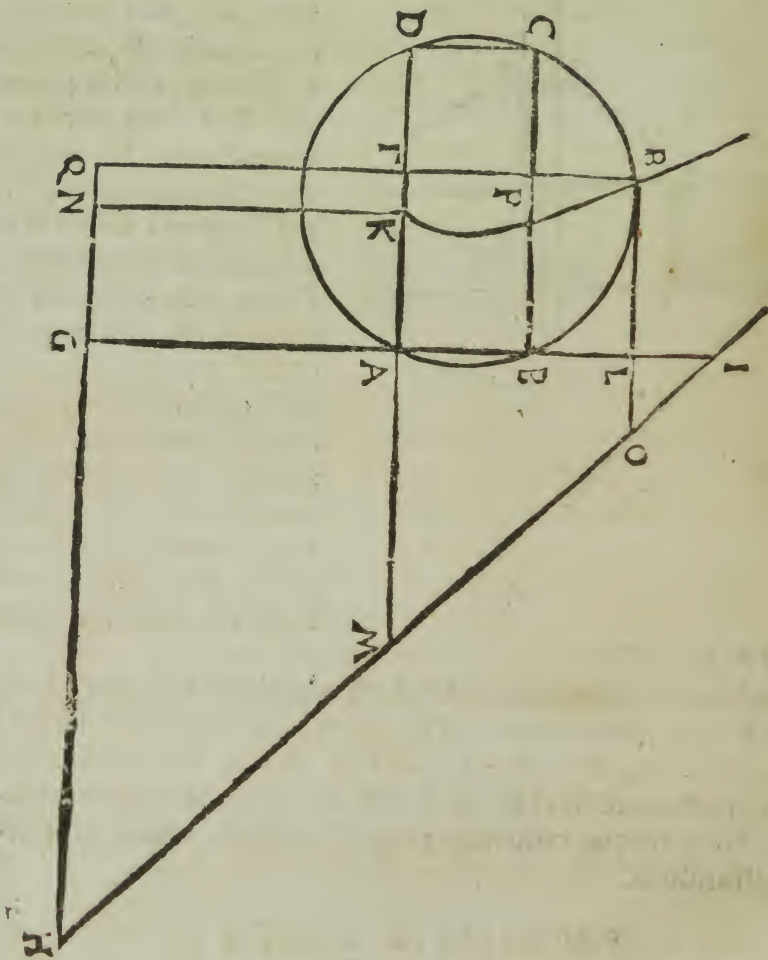
### PROPOSITIO SEXTA

*Idem alio modo efficere.*

fin



Int duæ datæ  $AD$  maior,  $AB$  minor, & rursus ex illis  
 rectangulum, circa quod describatur circulus  $ABCD$ ;



Tum productâ  $BA$ , vtrunque in  $G$ , &  $I$ , donec  $IA$ ,  $AG$ , sint  
 æquales  $AD$ , ducatur  $GH$ , parallela  $AD$ , & eiusdem dupla,  
 & iun-

gatur  $HI$ , sumptaque  $A K$ , æquali  $A B$ , circa asymptotos  $HG, HI$ , describatur Hyperbola transiens per punctum  $K$ , quæ à parte  $I$ , secet circulum in  $E$ .

Dico, demissâ normali  $EF$ , secante  $CB$  in  $P$ , quatuor  $AD, EF, FA, AB$ , esse continue proportionales.

Cadat ex  $K$ , in  $HG$  productam normalis  $KN$ , & ex  $E$ , in  $IG$ , normalis  $EL$ , quæ producta secet  $HL$ , in  $O$ , & producat  $EF$ , donec occurrat  $HG$ , similiter productæ, in  $Q$ , &  $DA$ , donec  $HI$ , occurrat in  $M$ . Patet  $AM$ , fore subduplam  $GH$ , hoc est æqualem  $DA$ , vel  $GA$ , vel  $AI$ .

Et quoniam  $EO, KM$ , itemque  $E Q, KN$ , sunt parallelæ, & ex punctis  $K$  &  $E$ , in hyperbolâ sumptis cadunt in asymptotos, erunt rectangula  $NKM, QEO$ , æqualia. Sed rectangulum  $NKM$ , æquatur rectangulo  $NKA$  (sive  $DAK$ ) & rectangulo sub  $NK$ , sive  $DA$ , in  $AM$  (hoc est quadrato  $GA$ , vel  $AI$ ) Rectangulum vero  $QEO$ , æquale est rectangulo  $QEL$ , & rectangulo ex  $QE$ , sive  $GL$ , in  $LO$  (vel  $LI$ , ob æquales  $HG, GL$ ) Igitur rectangulum  $DAK$ , cum quadrato  $IA$ , æquatur rectangulo  $QEL$ , cum rectangulo  $GLI$ , & addito utrimque quadrato  $LA$ , quadratum  $IA$ , cum rectangulo  $DAK$ , & quadrato  $LA$ , æquabitur rectangulo  $QEL$ , cum rectangulo  $ILG$ , & quadrato  $LA$ , (hoc est cum quadrato  $IA$ ). Et dempto utrimque quadrato  $IA$ , rectangulum  $DAK$ , cum quadrato  $LA$ , æquabitur rectangulo  $QEL$ . Et ablato utrimque rectangulo  $DAK$ , Quadratum  $LA$ , erit æquale rectangulo  $QEL$ , minus rectangulo  $DAK$ . Sed rectangulum  $QEL$ , æquale est duobus rectangulis  $QFA, FEL$ ; Igitur ablato utrimque rectangulo  $FEL$ , quadratum  $LA$  (sive  $FE$ ) minus rectangulo  $FEL$ , æquabitur rectangulo  $QFA$ , (sive  $BAF$ ,) minus rectangulo  $DAK$ . Sed quadratum  $FE$ , minus rectangulo  $FEL$ , æquatur rectangulo sub  $EF$ , & differentiâ  $EF, EL$ , rectangulum vero  $DAF$ , minus rectangulo  $DAK$ , æquatur rectangulo sub  $AD$ , & differentiâ ipsarum  $FA, AK$ ,  
(sive

D



(five FA, AB). Erit igitur ut DA, ad FE, ita EF minus EL, (hoc est minus FA) ad FA minus AB.

Sed, ob circulum, rectangulum FEP, æquale est rectangulo AFD, estque ut EF, ad FA, ita DF, (five DA minus AF,) ad EP (hoc est EF minus FP, vel AB,) Quatuor igitur rectæ DA, FE, FA, AB, habent conditiones lemmatis 9. ideoque sunt in continuâ proportionē. Quod erat demonstrandum.

## DE PROBLEMATVM SOLIDORVM CONSTRUCTIONE PER EASDEM LINEAS

IIIDEM INFINITIS MODIS

**Q**uomodo equationum cubicarum Varietas ad tres omnino formulas reducatur, iam ab alijs ostensum est: Affectas scilicet sub latere affirmatiuè, vel negatiuè, & amphibolas. Illas per totidem problemata, superiori methodo, construemus, quamuis duarum mediarum inuentione, & anguli trisectione, non ignoremus remfortasse breuius absolui potuisse. Sed methodi Varietatem & amplitudinem, sic ostendere malimus; quam qui perceperit, facile ad aliorum Problematum casus, etiam in quibus affectio sub quadrato est, non difficulter applicabit.

### LEMMA DECIMUM



In rectâ EA, si fuerit ut EA, ad AD, ita CA, ad AB;  
erit

ut  $EA$ , ad  $AD$ , ita rectangulum  $ACE$ , ad rectangulum ex  $AC$ , in  $BD$ .

**C**um enim sit ut  $EA$  ad  $AD$ , ita  $CA$ , ad  $AB$ ; erit permutando, ut  $EA$ , ad  $CA$ , ita  $AD$ , ad  $AB$ ; & diuidendo, ut  $EC$ , ad  $CA$ , ita  $DB$ , ad  $BA$ : rectangulum igitur ex  $DB$ , in  $CA$ , æquale erit rectangulo ex  $EC$ , in  $BA$ . Sed ut  $AB$  ad  $AC$ , ita (sumptâ communi altitudine  $EC$ ) rectangulum ex  $BA$  in  $EC$ , ad rectangulum  $ACE$ : Igitur ut  $BA$ , ad  $AC$ , ita rectangulum ex  $DB$  in  $CA$ , ad rectangulum  $ACE$ , sive ut rectangulum  $ACE$ , ad rectangulum ex  $DB$  in  $CA$ , ita  $CA$ , ad  $AB$ , hoc est, ex hypothese,  $EA$  ad  $AD$ . Quod erat demonstrandum.

## PROPOSITIO SEPTIMA.

*Lineam datam  $QD$ , sectam in  $A$  iterum secare in  $C$ , ut sit eadem ratio quadrati  $QA$ , ad quadratum  $AC$ , que est  $AC$  ad  $CD$ ; per circulum & Ellipsim infinitis modis.*

*Est autem paradigma æquationis cubicæ, affectæ sublatere, affirmatiuè.*

**F**iat super  $AD$ , semicirculus  $AKD$ , & à parte contrariâ erigatur in puncto  $A$ , normalis  $AF$  æqualis  $AQ$ , ac in eâ sumatur quodlibet punctum  $G$ , tum producat  $AD$  in  $E$ , donec  $AD$ , sit ad  $AE$ , ut  $GF$ , ad  $FA$ ; & perficiatur parallelogrammum  $GAER$ , diuisisque  $AG$ ,  $ER$ , bifariam in  $M$ , &  $N$ , iungatur  $NM$ , & producat in  $H$ , itaut rectangulum  $NHM$ , ad quadratum  $MA$ , eam habeat rationem, quam habet  $AF$ , ad  $FG$ , sumaturque  $NI$  in directum, æqualis  $HM$ . Tum axe  $HI$ , latere recto quod ad  $HI$  eandem habeat rationem, quæ est  $FG$ , ad  $FA$ , describatur semi-ellips  $HAKI$ . Quæ transibit per  $A$ , &  $E$ , ut patet ex constructione, secabitque

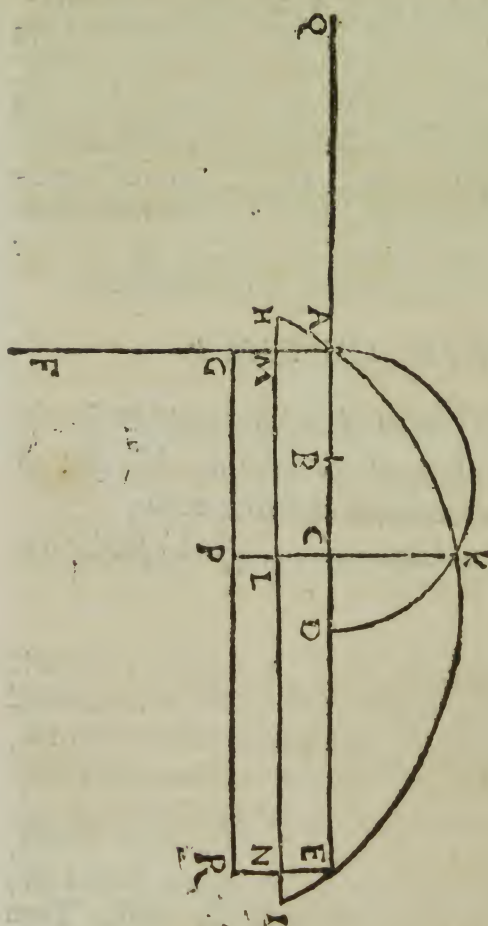


circulum in aliquo puncto ut K. Cadat ex illo in AD nor-  
malis KC.

Dico ita esse quadratum  $QA$ , ad quadratum  $CA$ , ut  $AC$ , ad  $CD$ . Producat  $KC$ , vsque dum secet rectas  $NM$ ,  $GR$ , in  $L$  &  $P$ . fiatque ut  $EA$ , ad  $DA$ , ita  $CA$  ad  $AB$ .

Exijs, quæ proportionē primā offensa sunt, eadem est ratio rectanguli  $ECA$ , ad rectangulū  $PKC$ , quæ lateris transversī ellipsos ad rectum, sive  $AF$ , ad  $FG$ , hoc est  $EA$ , ad  $AD$  (ex constructione). Sed ex lemma 10. ut  $EA$ , ad  $AD$ , ita rectangulum  $ECA$ , ad rectangulum ex  $AC$ , in  $BD$ ; rectangulum igitur ex  $AC$  in  $BD$ , æquale erit rectangulo  $PKC$ . Sed rectangulum ex  $AC$ , in  $BD$ , æquatur duobus rectangulis  $ACB$ ,  $DCA$ ; rectangulū vero  $PKC$ .

æquale est rectangulo PCK, vna cum quadrato CK : duo  
igitur rectangula ACB, DCA, æqualia sunt rectangulo PCK,  
cum

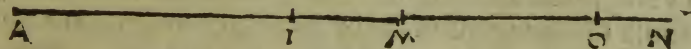


cum quadrato CK. Sed rectangulum DCA, est etiam æquale quadrato CK, (ob circulum.) Igitur, demptis æqualibus, remanebunt æqualia rectangula ACB, PCK, eritque ut P C ad C B, ita C A, ad CK. Sed cum sit ut A F, ad F G, ita E A, ad AD, live CA, ad AB, (ex constructione) erit per conversionem rationis, ut A F, ad A G (five C P) ita C A, ad CB, & permutando, ut A F, ad CA, ita C P, ad CB. Sed ex ostensis ut C P, ad CB, ita C A, ad CK. Igitur ut A F, ad CA, ita CA, ad CK. Tres igitur AF (five AQ) AC, CK, sunt in continua proportionem. Estque ut quadratum AQ, ad quadratum AC, ita quadratum AC, ad quadratum CK, hoc est (ob circulum) AC ad CD. Quod erat demonstrandum.

Idem accideret si in rectâ AF, in infinitum productâ ultra F, sumeretur punctum G. Non enim difficilior est demonstratio, quam, ut in propositione primâ, lectoris ingenio relinquimus.

Construximus itaque Problema, per circulum & Ellipsim, infinitis modis. Quod erat faciendum.

LEMMA VNDECIMVM



In rectâ AN sectâ in punctis I, M, O, si fuerit ut AM, ad MN, ita OM, ad MI, erit ut AM, ad MN, ita rectangulum AOM, ad rectangulum sub NI & OM.

Cum enim sit ut AM, ad MN, ita OM, ad MI, erit permutando, ut AM, ad OM, ita MN, ad MI, & componendo, ut AO, ad MO, ita NI, ad MI, & rursus permutando, ut AO, ad NI, ita MO, ad MI. Sed ut MO, ad MI, ita est

D 3

(ex



(ex hypothesi)  $AM$ , ad  $MN$ : Igitur ut  $AM$ , ad  $MN$ , ita  $AO$ , ad  $NI$ ; & sumptâ communi altitudine  $OM$ , ita rectangulum  $AOM$ , ad rectangulum ex  $NI$ , in  $OM$ . Quod erat demonstrandum.

## PROPOSITIO OCTAVA.

*Idem, infinitis modis, per circulum & Hyperbolam absolvere.*

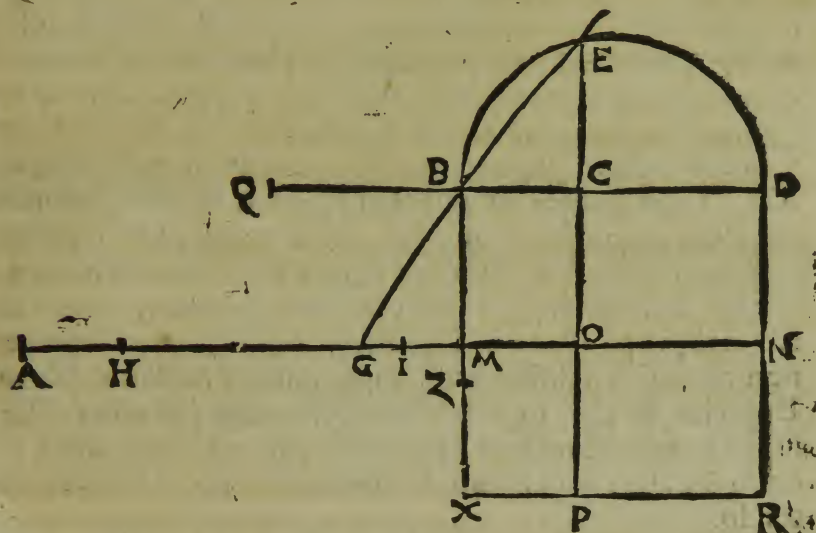
**D**etur itaque recta  $QD$ , secta in  $B$ , ita secanda in  $C$ , ut quadratum  $QB$ , ad quadratum  $BC$ , habeat rationem  $BC$ , ad  $CD$ . Fiat rursus super  $BD$ , semicirculus, erectaque a parte oppositâ, normalis  $BZ$ , æqualis  $BQ$ , producat ut cumque in  $X$ ; & perficiatur rectangulum  $XBDR$ ; sectisque  $BX$ ,  $DR$ ; bifariam in  $M$ , &  $N$ , iungatur  $NM$ , & producat in  $A$ , ita ut sit eadem ratio  $NM$ , ad  $MA$ , quæ  $XZ$ , ad  $ZB$ . Tum (si quidem fieri possit) recta  $AM$ , secetur, in  $G$ , ut rectangulum  $AGM$ , ad quadratum  $MB$ , eandem habeat rationem, quam habet  $BZ$ , ad  $ZX$ ; & ipsi  $MG$ , sumatur æqualis  $AH$ . Demum, axe  $HN$ , vertice  $G$ , latere transverso  $HG$ , recto vero, quod ad  $HG$ , sit ut  $XZ$ , ad  $ZB$ , describatur semihyperbola  $GBE$ : transibit enim per  $B$ , cum ponatur eadem ratio rectanguli  $AGM$ , vel  $HMG$ , ad quadratum  $MB$ , quæ  $BZ$ , ad  $ZX$ , sive lateris transversi, ad rectum: secabit etiam circulum in  $E$ , ex quo cadat in  $BD$  normalis  $EC$ .

Dico esse ut quadratum  $QB$ , ad quadratum  $BC$ , ita  $BC$ , ad  $CD$ .

Producat  $EC$ , usque dum secet parallelas  $MN$ ,  $XR$  in punctis  $O$ , &  $P$ . Tum fiat ut  $AM$ , ad  $MN$ , ita  $OM$ , ad  $MI$ .

Exijs quæ propositione 2. ostensa sunt, rectangulum  $AOM$ , ad rectangulum  $PEC$ , eandem habet rationem, quæ est lateris transversi ad rectum; sive  $BZ$ , ad  $ZX$ , vel  $AM$ , ad  $MN$ ,

\* Lemma: II.



Nunc (ex constructione) vt XZ, ad ZB, ita NM ad MA,  
vel IM, ad MO: erit igitur componendo, vt XB, ad BZ, ita  
IO, ad MO, & permutando, vt XB, (vel PC,) ad IO, ita BZ,  
(vel BQ,) ad MO, vel BC.

Sed vt PC, ad IO, ita iam demonstratum est esse CB, ad CE;



$CE$ ; igitur ut  $BQ$  ad  $BC$ , ita  $BC$ , ad  $CE$ , & ut quadratum  $BQ$ , ad quadratum  $BC$ , ita quadratum  $BC$ , ad quadratum  $CE$ , hoc est (ob circulum) ita  $BC$ , ad  $CD$ . Quod erat &c.

Si recta  $AM$ , ita secari non possit, quemadmodum in constructione imperatum est, tunc  $BX$ , secunda esset, eadem plane methodo, qua propositione 2. usi sumus, & quam qui intellexerit facile ad huius propositionis casum applicabit: ideoque monuisse sufficiat.

Addo tantum, si punctum  $G$ , inciderit in medium ipsius  $AM$ , Tunc rectam ex puncto  $G$ , per  $B$  ductam, secturam circulum in puncto  $E$  quaesito, ut demonstrationis vestigia repetenti constabit. Solvetur itaque Problema solidum per lineam & circulum. Hoc mirum foret, inquam, si non casu, sed arte, in punctum  $X$  incidisses. At illud arte invenire, non minoris est difficultatis quam ipsum Problema solvere. Experire, & cum in illud incideris (neglectâ rectâ  $GBE$ ) iunge dumtaxat rectam  $XD$ , & ex  $Z$ , du c ipsi paralleam, illa enim incurret in punctum  $C$  quaesitum. Quod breviter ostendo.

Quoniam punctum  $G$ , bisecat rectam  $AM$  (ex Hypothesi) erit rectangulum  $AGM$ , pars quarta quadrati  $AM$ . Ponitur autem ita esse  $BZ$ , ad  $ZX$ , ut rectangulum  $AGM$ , ad quadratum  $BM$ : Igitur sumptis consequentium quadruplis erit ut  $BZ$ , ad  $ZX$ , ita quadratum  $AM$ , ad quadratum  $BX$ . Sed ut  $BZ$ , ad  $ZX$ , ita  $AM$ , ad  $MN$  (ex constructione): igitur ut quadratum  $AM$ , ad quadratum  $BX$ , ita  $AM$ , ad  $MN$ , sunt itaque tres proportionales  $AM$ ,  $BX$ ,  $MN$  vel  $BD$ : Estque rursus ut  $AM$ , ad  $MN$ , vel  $BD$ , ita quadratum  $BX$ , ad quadratum  $BD$ , hoc est (cum  $ZC$ , ponatur parallela  $XD$ ,) ita quadratum  $BZ$ , ad quadratum  $BC$ . Sed ut  $AM$ , ad  $MN$ , ita, rursus, ex constructione,  $BZ$ , ad  $ZX$ , hoc est (ob parallelas  $XD$ ,  $ZC$ ,) ita  $BC$ , ad  $CD$ . Igitur ut quadratum  $BZ$ , (vel  $BQ$ ) ad quadratum  $BC$ , ita  $BC$ , ad  $CD$ . Quod erat &c.

conf.

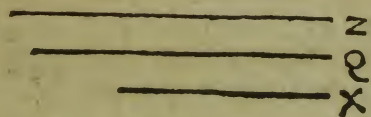


Construximus itaque Problema per circulum & Hyperbolam infinitis modis. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO NONA.

*Datis duabus rectis Z, & Q, invenire tertiam ut X, ad cuius quadratum eandem habeat rationem quadratum Z, quæ est ipsius X, ad utramque Q & X. Est autem paradigma equationis, cubica affecta sub latere negati vè.*

**S**vmatur FN, æqualis Q, & erigatur FH, dupla Z, bisecta in G. Tum in rectâ GF, (vel eadem versus F in infinitum productâ) sumpto quolibet puncto A, ducatur AD parallela & æqualis FN, & secetur vel producat in E, itavt sit eadem ratio AD, ad AE, quæ est AG, ad GH, perfectoque rectangulo HAES, bisecentur rectæ AH, ES, in T, & V, ductaque TV, producat in R, itavt rectangulum TRV,



ad quadratum VE, eandem habeat rationem, quam HG, ad GA & productâ

VT, in Y, donec TY, sit æqualis VR, super axe YR, describatur semi-ellipsis YIR, in quâ ratio lateris transversi ad rectum, sit eadem quæ HG, ad GA; transibit illa per A, & E, (ex constructione) & secabit circulum, vel supra, vel infra N, vel in ipso puncto N. Secet primo supra, in puncto I, & ex I, demittatur in FN, normalis IK.

Dico FK, æqualem esse linæ X, quæ sitæ; sive ita esse quadratum FG, ad quadratum FK, vt FK, ad duas FN, FK.

Producatur IK, vsque dum secet parallelas AE, TV, HS, in C, L, M. Fiatque vt EA, ad DA, ita CA, ad BA.

Nunc (ob ellipsim) eadem erit ratio rectanguli ECA, ad  
E rectan-







& sumptis duplis rectangulum sub duplâ FG ( hoc est  $FH$  vel  $KM$  ex constructione ) in  $IM$ , æquabitur duplo quadrato  $AC$ , Rectangulum vero  $MIK$ , æquale etiam est rectangulo  $DCA$ , Igitur additis æqualibus rectangulum  $DCA$ , cum duplo quadrato  $AC$ , æquale est duobus rectangulis  $IMK$ ,  $MIK$ ; & cum rectangulum  $DCA$ , cum duplo quadrato  $CA$ , æquetur rectangulo  $DAC$ , cum quadrato  $AC$ , rectangulum  $DAC$  cum quadrato  $AC$ , æquale erit duobus rectangulis  $IMK$ ,  $MIK$ , sive quadrato  $IM$ .

Demonstratum vero est, esse ut quadratum  $FG$ , ad quadratum  $AC$ , ita quadratum  $AC$ , ad quadratum  $IM$ . Erit igitur similiter ut quadratum  $FG$ , ad quadratum  $AC$ , ita quadratum  $AC$ , ad rectangulum  $DAC$  cum quadrato  $AC$ , hoc est (dempta communi altitudine  $AC$ ) ita recta  $AC$ , ad duas  $DA$ ,  $AC$ . Et consequenter ut quadratum  $FG$ , ad quadratum  $FK$ , ita  $FK$ , ad duas  $FN$ ,  $FK$ . Quod erat demonstrandum.

Si punctum  $I$ , caderet infra  $N$ , normalis ex  $I$  in  $FN$  productam, daret rectam quæsitam, ut prius; cuius demonstratio superiori similis est.

Si vero transiret per  $N$ , tum ipsa  $FN$  esse recta quæsitæ. Quo casu patet quadratum rectæ  $GF$ , subduplum esse quadrati rectæ  $FN$ . Itaque ex his datis solvi potest problema sine vlla constructione. Quod fusius persequi nostri non est instituti.

Eadem esset demonstratio si punctum  $A$  ultra  $F$ , in  $GF$  productâ sumptum esset, ut consideranti planum fiet.

Construximus itaque Problema per circulum & Ellipsim infinitis modis. Quod erat faciendum.

## PROPOSITIO DECIMA

*Propositum sit idem per circulum & Hyperbolam infinitis modis absolute.*

E 2

Sine,



**S**int, eadem quæ prius, rectangulum  $HFNP$ , & circa illud circulus: bisectâque  $NP$ , in  $A$ , sumatur ultra  $A$ , quodlibet punctum  $G$ , & perficiatur rectangulum  $GPHY$  bisectisque etiam  $GP$ , in  $B$ , &  $YH$ , in  $O$ , iungatur  $AO$ , & ita producaturs usque ad  $E$ , ut sit eadem ratio  $BE$ , ad  $BO$ , quæ est  $PA$ , ad  $AG$ : Tum secetur  $BE$ , in  $D$ , itavt rectangulum  $EDB$ , ad quadratum  $BG$ , habeat rationem  $PA$ , ad  $AG$ ; & sumatur  $EQ$ , æqualis  $BD$ . Demum vertice  $D$ , latere transverso  $DQ$ , axe  $DO$ , describatur Hyperbola, cuius latus transversum ad rectum, sit in ratione  $PA$ , ad  $AG$ ; & quæ occurrat circulo in puncto  $I$ , (occurreret enim, & transibit per punctum  $G$ , ut patet ex constructione:) cadat ex  $I$ , in  $HB$ , normalis  $IM$ , secans rectas  $FN$ ,  $YG$ ,  $OB$ , in punctis  $K$ ,  $C$ ,  $L$ .

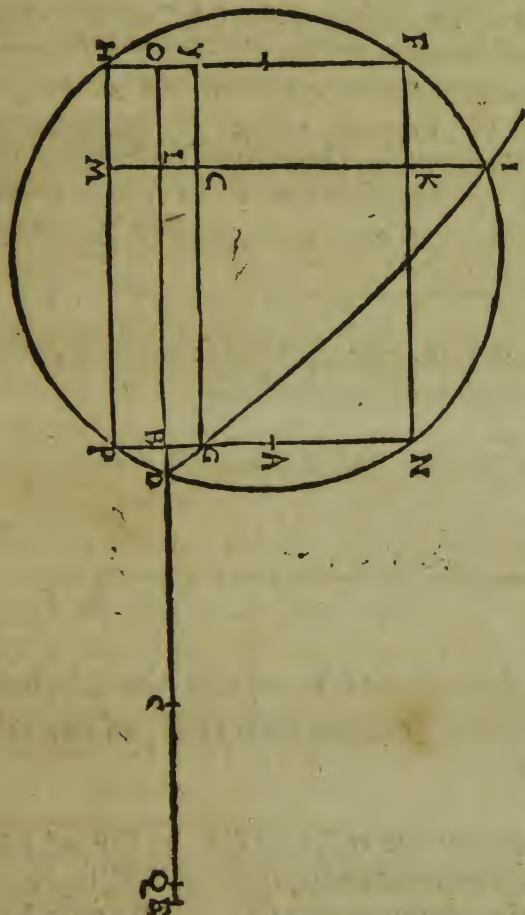
Dico  $NK$ , esse lineam quæsitam; sive ita esse quadratum  $AN$ , ad quadratum  $NK$ , ut est  $NK$ , ad utramque simul  $NK$ ,  $NF$ .

Fiat ut  $EB$ , ad  $BO$ , ita  $LB$ , ad  $BS$ .

*\* p. lemm:*  
Ex ante ostensis, rectangulum  $ELB$ , ad rectangulum  $MIC$ , habet rationem  $PA$ , ad  $AG$ , sive  $EB$ , ad  $BO$ , vel lateris transversi ad rectum. Sed ut  $EB$ , ad  $BO$ , ita rectangulum  $ELB$ , ad rectangulum sub  $OS$  &  $BL$ . \* Igitur rectangulum sub  $OS$ , &  $BL$ , æquale est rectangulo  $MIC$ . Rectangulum vero sub  $OS$ , &  $BL$ , æquale est rectangulis  $SLB$ , &  $OLB$  (sive  $HMP$ ) rectangulum autem  $MIC$ , æquale etiam est duobus  $MIK$ , &  $MI$  in  $KC$ . Itaque duo rectangula  $SLB$ ,  $HMP$  æqualia erunt duobus  $MIK$ , &  $MI$  in  $KC$ . Sed rectangula  $HMP$ ,  $MIK$ , etiam æqualia sunt (ob circulum): Igitur demptis æqualibus, æqualia remanebunt rectangula  $SLB$ ,  $MI$  in  $KC$ , eritque ut  $KC$ , ad  $SL$ , ita  $BL$ , ad  $MI$ .

Uterius, est ut  $PA$ , sive  $NA$ , ad  $AG$ , ita,  $LB$ , ad  $BS$  (ex constructione,) erit igitur componendo, ut  $NG$ , ad  $AG$ , ita  $LS$ , ad  $BS$ , & per conversionem rationis, ut  $NG$ , sive  $KC$ , ad  $NA$ , ita  $SL$ , ad  $LB$ , & permutando, ut  $KC$ , ad  $SL$  ita  $NA$ , ad  $LB$ .

quadratum  $NA$  ad  
quadratum  $LB$ , ita  
quadratum  $LB$ , ad  
quadratum  $MI$ : &  
cum tres sint pro-  
portionales, rec-  
tangulum  $NA$ ,  $MI$ ,  
est æquale quadra-  
to  $LB$ . Itaque  
superioris duplis rec-  
tangulum sub du-  
pla  $NA$ , in  $MI$   
(sive rectangulum  
 $KMI$ ), æquale erit  
duplo quadrato  
 $BL$ , & additis  
æqualibus (ob cir-  
culum) rectangu-  
lis,  $MIK$ ,  $BLO$ ;  
duo rectangula  
 $KMI$ ,  $MIK$ , (sive  
quadratum  $MI$ )  
æqualia erunt rec-  
tangulo  $BLO$ , cū  
duplo quadrato  
 $BL$ . Sed rectan-  
gulum  $BLO$ , cum  
duobus quadratis  
 $BL$ , æquale est  
rectangulo  $OBL$ .



& quadrato BL; Igitur quadratum MI, æquatur rectangulo  
 OBL, cum quadrato BL, eſque eadem ratio BL, ad MI,  
 D 3 quæ



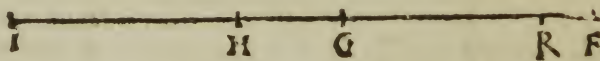
quæ MI, ad OB cum BL. Et ut quadratum BL, ad quadratum MI, ita BL, ad OB cum BL.

Sed ut quadratum LB, ad quadratum MI, ita demonstratum est superius esse quadratum NA, ad quadratum LB; Igitur ut quadratum NA, ad quadratum LB, ita LB, ad duas BL, OB five ut quadratum AN, ad quadratum KN, ita NK, ad duas NK, NF. Quod erat demonstrandum.

*Alios casus non persequor, cum scilicet punctum G, cadit ultra P, in lineâ AP, indefinitè productâ. Ex his enim quæ ante demonstrata sunt, illorum constructio & demonstratio sese offeret consideranti.*

Absolvimus Itaque Problema, per circulum & Hyperbolem infinitis modis. Quod erat faciendum.

LEMMA DVODECIMVM



*In rectâ IF, si fuerit ut IG, ad GH, ita GF, ad FR, erit ut IG, ad GH, ita rectangulum IFG, ad duo rectangula HGF, GFR.*

**C**um enim ponatur esse ut IG, ad GH, ita GF, ad FR, erit permutando & componendo, ut IF, ad GF, ita HG cum FR, ad FR, & rursus permutando ut IF, ad HG cum FR, ita FG, ad FR. Sed ut IF, ad HG cum FR, ita sumptâ communis altitudine FG, rectangulum IFG, ad duo rectangula HGF, RFG.

*RFG*, Igitur ut *FG*, ad *FR*, sive *IG*, ad *GH* (ex constructione), ita rectangulum *IFG*, ad duo rectangula *HGF*, *RFG*. Quod erat demonstrandum.

## PROPOSITIO VNDECIMA.

*Datis duabus rectis P, & Q, invenire tertiam ut Z, ad cuius quadratum, quadratum datae P eandem habeat rationem, quæ est ipsius X, ad excessum X, supra Q.*

*Est autem paradigma æquationis cubicæ, affectæ sublatare, & amphibolæ.*

**A**ccipiat *AB*, dupla *P*, bisecta in *M*, eique ad rectos *AC*, æqualis *Q*: perficiatur rectangulum *ACB*, & circa illud describatur circulus *AFBC*. Tum sumpto in *MB*,

$$\begin{array}{r} P \\ \hline Q \\ \hline X \end{array}$$

etiam indefinitè producta, quolibet puncto *E*, producat *AC* in *K*, fiatque ut *ME*, ad *MB*, ita *AC*, ad *AK*, & perficiatur rectangulum *AEIK*.

Bisectisque *AK*, *EL*, bifariam

in *S*, & *T*, iungatur *ST*, & producat in *N*, itavt rectangulum *SNT*, ad quadratum *TE*, eandem habeat rationem, quam *EM*, ad *MB*; sumaturque *SO*, indirectum æqualis *TN*. Tum axe *ON*, fiat semi-ellipsis, in qua ratio axis *ON*, ad latus rectum, eadem sit quæ *EM*, ad *MB*, transibit illa per puncta, *A* & *E*, ut evidens est ex constructione. Si vero occurrat circulo, occurrerit in vno vel pluribus punctis. Occurrat in *F*, ex quo cadat in *AB*, normalis *FG*, quæ producta secet parallelas *CD*, *KL*, in punctis *H*, & *I*.

Dico *FG*, esse æqualem *X*, quæ sitæ, sive ita esse quadratum *BM*, ad quadratum *FG*, ut *FG*, ad excessum *FG* supra *AC*, vel *GH*.

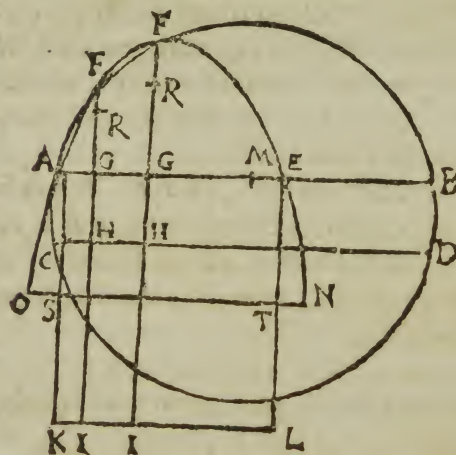
Fiat



Fiat ut BM ad ME, five IG, ad GH, ita GF, ad FR.

\*p. lemm.  
12.

Nunc (ob ellipsim) eadem erit ratio rectanguli EGA, ad rectangulum IFG, quæ est axis ON, ad latus rectum, five EM, ad BM, hoc est HG, ad GI, ex constructione. Sed ut HG, ad GI, ita duo rectangula HGF, GFR, ad rectangulum IFG\*, Igitur duo rectangula HGF, GFR, æqualia sunt rectangulo EGA. Et addito utrimque rectangulo sub BE & GA, tria rectangula HGF, GFR, BE in GA, æqualia erunt duobus rectangulis EGA, & BE in GA, hoc est unico BGA.



Sed cum rectæ HG, & FR, æquales sint rectæ HF minus RG, sumpta communi altitudine GF, erunt rectangula HGF, GIR, æqualia rectangulo HFG, minus rectangulo FGR. Igitur rectangulum HFG, minus rectangulo FGR, una cum rectangulo BE in GA, æquale erit rectangulo BGA, & addito utrimque rectangulo FGR, duo rectangula HFG, & BE in GA, æqualia erunt duobus BGA, F

GR. Sed rectangulum BGA, æquale est rectangulo HFG (ob circulum); Igitur, ablatis æqualibus, æqualia remanebunt rectangula BE in GA, & FGR, eritque ut BE, ad GR, ita FG, ad GA.

Nunc, ex constructione, est ut BM, ad ME, ita GF, ad FR, erit




erit itaque per conversionem rationis, vt BM, ad BE, ita FG, ad GR; & permutando, vt BM, ad FG, ita BE, ad GR. Sed vt BE, ad GR, ita FG, ad GA (ex ante demonstratis); Igitur vt BM, ad FG, ita FG, ad GA, & vt dupla BM (sive BA) ad duplam FG, ita FG, ad GA; & per consequens rectangulum BAG, æquale erit duplo quadrato FG, Sed rectangulum BAG, æquale est quadrato AG, vna cum rectangulo BGA (sive AFG, ob circulum): Igitur quadratum AG, vna cum rectangulo HFG, æquale erit duplo quadrato FG. Est autem rectangulum HFG, æquale quadrato FG, cum rectangulo FGH: quadrata itaque AG, FG, cum rectangulo FGH, æqualia erunt duplo quadrato FG & ablato vtrimque quadrato FG, quadratum AG, cum rectangulo FGH, æquale remanebit quadrato FG. Et ablato iterum vtrimque rectangulo FGH, quadratum AG, remanebit æquale quadrato FG, minus rectangulo FGH. ideoque erit eadem ratio FG, ad AG, quæ est ipsius AG, ad FG minus GH: & vt quadratum FG ad quadratum AG, ita FG, ad FG minus GH.

Sed vt FG ad AG, ita ostensum est esse, BM, ad FG, & vt quadratum FG, ad quadratum AG, ita quadratum BM, ad quadratum FG. Igitur vt quadratum BM, ad quadratum FG, ita FG, ad FG minus GH; sive ita FG, ad excessum FG, supra AC. Quod erat demonstrandum.

*Determinationem Problematis & numerum radicum lectoris industrie relinquo, cum hæc fuse ab alijs ostensa sint.*

Sufficit nunc Problema per circulum & Ellipsim infinitis vt propositum est modis absoluisse. Quod erat faciendum.

#### LEMMA DECIMUM TERTIUM

*Sumptis in rectâ IR, tribus punctis G, H, F, si fuerit ut*  

*GH,*



*GH, ad GI, ita FG, ad GR, erit ut GH, ad GI, ita rectangulum GFH, ad rectangulum RGF, minus rectangulo IGF.*



**C**um enim sit ut GH, ad GI, ita FG, ad GR, erit convertendo & permutando, ut FG, ad GH, ita GR, ad GI, & dividendo ut FH, ad HG, ita GR minus GI, ad GI, & rursus permutando ut FH, ad GR minus GI, ita GH, ad GI. Sed ut FH, ad GR minus GI, ita, sumptâ communi altitudine FG, rectangulum GFH, ad rectangulum RGF, minus rectangulo IGF. Igitur ut GH, ad GI, ita rectangulum GFH, ad rectangulum RGF, minus rectangulo IGF. Quod erat demonstrandum.

#### PROPOSITIO DVO DECIMA

*Idem per circulum & Hyperbolam iisdem modis efficere.*

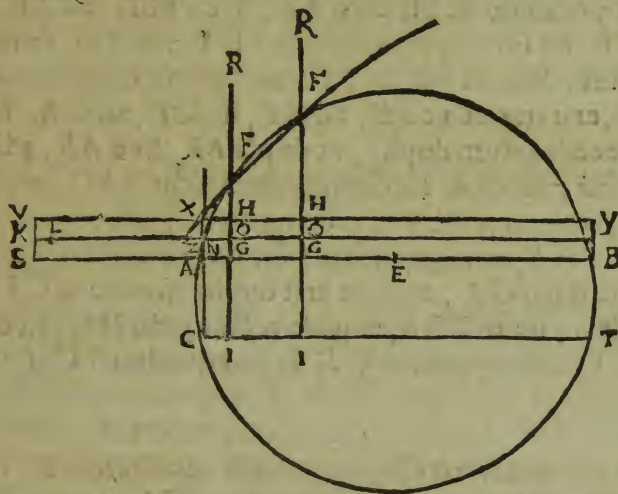
**S**umptâ rursus AB, duplâ P, bisectâ in E, & AC normali, æquali Q, fiat rectangulum CABT, & circa illud circulus, productâque BA quantumlibet in S, producatzr item CA, in X, ita ut sit CA, ad AX, quemadmodum SE, ad EA, perfectisque rectangulis SAXV, XAYB, secantur XA, VS, bifariam in K, & N, iunctaque KN dividatur in Z, ita ut rectangulum KZN, ad quadratum NX, eam habeat rationem, quam habet CA, ad AX: sumptâque KL, æquali ZN, vertice Z, axe ZN, latere transverso LZ, recto vero, ad quod illud se habeat ut CA, ad AX, describatur semi-hyperbola ZXF, quæ utique transibit per X, ex constructione, & siquidem occurrat circulo, id fiet in vno, vel pluribus punctis. Occurrat  
in

PROBLEMATATA SOLIDA

43

in F, unde demittatur in CT, normalis, FI, secans parallelas XY, KN productam & AB, in punctis H, O, G.

Dico FG, esse Z quæsitam, siue ita esse quadratum AE, ad quadratum FG, vt FG, ad excessum FG supra AC.



Fiat vt HG, ad GI, ita GF ad GR.

Quoniam itaque punctum K, est ad Hyperbolem, erit, ex sæpe ostensis, eadem ratio rectanguli GFH, ad rectangulum KON, quæ est lateris recti, ad transversum, siue XA, ad AC, ex constructione, vel HG, ad GI. Sed vt HG, ad GI, ita idem rectangulum GFH, ad rectangulum RGF, minus rectangulo IGF\*: Igitur rectangulū KON, siue SGA, æquale est rectangulo RGF, minus rectangulo IGF. Sed rectangulum BGA est etiam æquale rectangulo IFG (ob circulum); Itaque additis æqualibus, duo rectangula SGA, BGA, siue vnicum SB in GA, æquatur rectangulo RGF, minus rectangulo IGF, vna cum rectangulo IFG; & cum rectangulum IFG æquale sit rectangulo IGF vna cum quadrato FG; sequitur rectangulum SB in GA, æquale esse rectangulo RGF, cum quadrato GF,

\* p. lemm: 13.

F 2

hoc



hoc est rectangulo ex RG cum GF, in GF. Est itaque vt SB, ad RG cum GF, ita GF, ad GA.

Nunc vt IG, ad GH, sive CA, ad AX, ita SE, ad AE, ex constructione: Igitur vt SE, ad AE ita RG, ad GF ex eadem. Et componendo vt SE cum AE, sive vt SB, ad AE, ita RG cum GF, ad GF & permutando vt SB, ad RG, cum GF, ita AE ad GF. Sed vt SB, ad RG cum GF, ita ostensum esse GF, ad GA; erit itaque vt AE, ad GF, ita GF, ad GA. Et sumptis antecedentium duplis, vt dupla AE, sive AB, ad GF, ita dupla GF, ad GA. Rectangulum igitur BAG, æquale erit duplo quadrato GF. Sed rectangulum BAG, æquale est rectangulo BGA, cum quadrato AG. Itaque rectangulum BGA, cum quadrato GA, æquale erit duplo quadrato GF. Est autem rectangulum BGA, æquale rectangulo IFG, sive rectangulo IGF, cum quadrato GF; Igitur quadratum GA, vna cum rectangulo IGF, & quadrato GF, æquale erit duplo quadrato GF, sive ablato vtriusque quadrato GF, rectangulum IGF, cum quadrato GA, æquabitur quadrato GF, & ablato vtriusque rectangulo IGF, quadratum GA, æquale erit quadrato GF, minus rectangulo IGF, hoc est æquale erit rectangulo, ex GF, in GF minus IG. Erit itaque vt GF, ad AG, ita GA, ad GF minus IG.

Sed vt GF, ad GA, ita ostensum est esse AE, ad GF; igitur vt AE, ad GF, ita GF, ad GA, & GA, ad GF minus IG. Et vt quadratum AE, ad quadratum GF, ita GF, ad GF minus IG, hoc est ad excessum GF, supra AC Quod erat demonstrandum.

*Reliqui casus facile construentur & demonstrabuntur, ex ijs quæ propositione 2. & alijs ostensa sunt. Determinationem vero Problematis, vt prius, lectori relinquimus.*

Constat itaque nos id quod propositum erat per circulum & Hyperbolam infinitis modis effecisse. Quod erat faciendum.

Quo-



Quoniam vero anguli trisectione, & duarum mediarum inter datas inventionem, omne problema solidum solvi potest; Non alienum ab hac materia visum est, anguli trisectionem per circulum & Hyperbolam demonstrare: ut ad investigandas methodo superiori infinitas Ellipses & Hyperbolas, quæ cum circulo idem præstant, lectorem excitemus. Sic itaque.

## PROPOSITIO DECIMA TERTIA.

Angulum datum secare trifariam.

Datus sit angulus  $BAC$ , secandus trifariam. Centro  $A$  intervallo quolibet ut  $AC$ , describatur semicirculus, qui secet  $CA$  productam in  $S$ , &  $AB$  in  $B$ . Et ex  $B$ , in  $AC$  cadat normalis  $BD$ , tum ex  $AS$ , resecetur  $AF$ , æqualis dimidiæ  $AD$ , erectâque  $FN$ , æquali dimidiæ  $DB$ , & eidem parallelâ, ducatur  $NL$ , parallela  $AD$ . Demum circa asymptotos  $NF$ ,  $NL$ , describatur hyperbola transiens per punctum  $A$ , quæ secet circulum in  $I$ , & iungatur  $AI$ .

Dico angulum  $IAC$ , subtripulum esse anguli  $BAC$ .

Sumatur  $AC$ , æqualis  $AD$ , & erigatur ad circulum normalis  $GH$ , quæ utique erit æqualis  $DB$ , iunctisque  $HA$ ,  $HI$ , producat  $HI$ , donec occurrat lineæ  $AC$  productæ, in puncto  $Q$ . Tum perficiatur rectangulum  $FNMA$ , & ex puncto  $I$ , cadat in  $AC$ , normalis  $IR$ , quæ producta secet  $NM$  in  $L$ . Et in  $FN$  normalis  $IO$ , secans  $MA$ , in  $P$ .

Quoniam igitur duo puncta  $I$ , &  $A$ , sunt in eadem Hyperbolâ, & ex illis ductæ sunt ad asymptotos parallelæ  $IL$ ,  $AM$ , &  $IO$ ,  $FA$ , erit rectangulum  $OL$ , æquale rectangulo  $FM$ : & ablato communi rectangulo  $OM$ , additoque utrimque rectangulo  $AI$ , rectangulum  $FI$ , æquale erit rectangulo  $AL$ ; Itaque erit eadem ratio  $L R$ , ad  $FR$ , quæ est  $RI$ , ad  $RA$ ; &

F 3

sumptis





occurrente circulo in  $K$  ostendetur (ducta  $AK$ ) angulum  $KAS$ , esse subtripulum anguli  $SAB$ , residui ad duos rectos; siue quod idem est, arcum  $SK$ , esse tertiam partem arcus  $SB$ ; & per consequens arcum  $KI$ , esse duas tertias semi-peripheria; siue tertiam partem integræ circumferentiæ.

## APPENDIX

De solutione eorundem Problematum  
per circulum & Parabolam,

Parabolas, quæ cum circulo Problemata solida solvant, infinitas non esse, velut sunt Ellipses, & hyperbolæ penitior illarum linearum contemplatio satis ostendit. Duas, quæ sese offerunt, breviter indicabimus, in problemate primo.

**I**Taque (repetito eius Schemate) Quoniam ostensum est tres  $CA$ ,  $EF$ ,  $EA$ , esse proportionales, &  $CA$  data est (ex constructione) patet punctum  $F$ , esse ad parabolam cuius vertex est  $A$ , axis  $AF$ , & latus rectum eadem  $AF$ .

Similiter, quoniam etiam tres  $AE$ ,  $EF$ ,  $AD$ , demonstratæ sunt proportionales, &  $AD$  data est, sequitur idem punctum  $F$ , esse ad parabolam, cuius vertex  $A$ , axis  $AD$ , & latus rectum eadem  $AD$ .

Quæ observatio ad sex primas propositiones adstringitur, sed non difficulter, duas saltem parabolas, quæ proposito satisfaciant in propositionibus 7. 8. 9. 10. 11. 12. eodem modo reperies.

An vero non aliæ quoque ad hanc effectiorem, cum circulo adhiberi possunt. Imo aliæ quoque, sed non infinitæ, unam damus in exemplum.

PRO-



## PROPOSITIO DECIMA QVARTA.

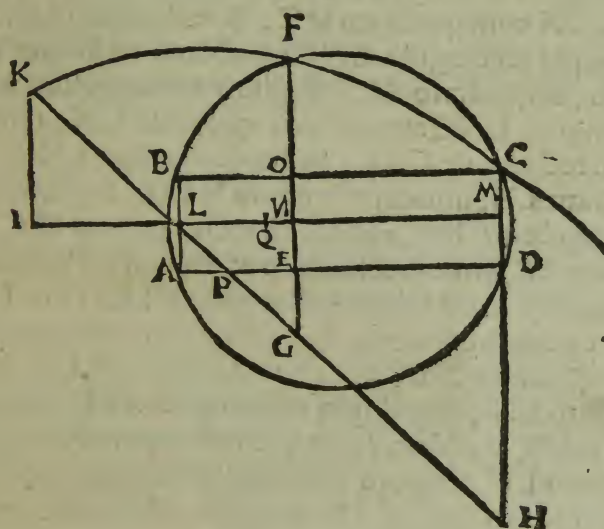
*Inter extremas datas, duas medio loco proportionales invenire, per circulum & parabolam.*

**S**int duæ datæ  $AD$ , maior,  $AB$  minor, & exijs rectangulum  $ABCD$ , ac circa illud circulus. Secentur  $AB$ ,  $CD$ , bifariam in  $L$ , &  $M$ , & iunctâ  $LM$ , sumatur in eâ  $LQ$ , æqualis  $AB$ : & sumptâ  $AP$ , in  $AD$ , æquali  $LA$ , iungatur  $LP$ , & producatnr donec cum  $CD$ , pariter productâ, concurrat in  $H$ . Tum producatnr etiam  $ML$ , in  $I$ , itavt sit eadem ratio  $QM$ , ad  $CH$ , quæ  $CH$ , ad  $MI$ , erectâque in  $I$ , normali, quæ cum  $HL$  productâ, concurrat in  $K$ , vertice  $K$ , diametro  $KH$ , describatur parabola, cuius vna applicatarum sit  $HC$ , & quæ circulum secet in  $F$ ; vnde cadat in  $AD$ , normalis  $FE$ , secans parallelas  $BC$ ,  $LM$ , in  $O$ , &  $N$ , & quæ producta occurrat  $LH$ , in  $G$ .

Dico quatuor  $AD$ ,  $FE$ ,  $EA$ ,  $AB$ , esse continue proportionales.

Quadratum enim  $CH$ , est æquale duobus quadratis  $HM$ ,  $MC$ , vna cum rectangulo ex  $HM$  in duplam  $MC$ . Sed  $HM$ , est æqualis  $ML$ , &  $LQ$  est dupla  $MC$ , (ex constructione;) igitur quadratum  $CH$ , est æquale quadrato  $LM$ , cum quadrato  $MC$ , & rectangulo  $MLQ$ . Quadratum vero  $CH$ , est æquale rectangulo  $IMQ$  (etiam ex constructione) Itaque rectangulum  $IMQ$ , est æquale quadratis  $LM$ ,  $MC$ , cum rectangulo  $MLQ$ . Sed rectangulum  $IMQ$ , est æquale rectangulo ex  $IL$  in  $MQ$ , cum rectangulo  $LMQ$ , (hoc est cum quadrato  $LM$ , minus rectangulo  $MLQ$ ;) Igitur rectangulum ex  $IL$ ,  $MQ$ , cum quadrato  $LM$ , minus rectangulo  $MLQ$ , erit æquale quadratis  $ML$ ,  $MC$ , cum rectangulo  $MLQ$ : & ablato utrimque quadrato  $ML$ , & addito rectangulo  $MLQ$ , rectangulum

Uterius quoniam duæ  $CH, FG$ , sunt applicatæ ad diametrum parabolæ, erit ut quadratum  $CH$ , ad quadratum  $FG$ , ita  $HK$ , ad  $GK$ . Sed ut  $HK$ , ad  $GK$ , ita  $MI$ , ad  $NI$  (ob parallelas): Igitur ut quadratum  $CH$ , ad quadratum  $GF$ , ita  $MI$ , ad  $NI$ , vel sumptâ communi altitudine  $MQ$ , ita rectangulum  $IMQ$ , ad rectangulum sub  $IN MQ$ , & permutando, ut



quadratum CH, ad rectangulum IMQ, ita quadratum GF, ad rectangulum sub INMQ. Est autem quadratum CH, æquale rectangulo IMQ (ex constructione,) Igitur quadratum FG, æquale etiam erit rectangulo INMQ. Sed rectangulum INMQ, est æquale rectangulis ex ILMQ, & LNMQ: ex ostensis vero rectangulum ILMQ, æquatur duplo rectangulo



gulo  $MLQ$ , cum quadrato  $MC$ . Igitur quadratum  $FG$ , æquale erit rectangulo  $LN MQ$ , cum duplo rectangulo  $MLQ$ , & quadrato  $MC$ . Et cum rursus rectangulum  $LN MQ$ , æquale sit duobus  $LMN$ ,  $LNQ$ , sequitur duo rectangula  $LMN$ ,  $LNQ$ , cum duplo rectangulo  $MLQ$  & quadrato  $MC$ , æquari quadrato  $FG$ : hoc est duobus quadratis  $GN$ ,  $NF$  cum duplo rectangulo  $GNF$ . Est autem quadratum  $NF$ , æquale quadrato  $NO$ , vel  $MC$ , cum rectangulo  $EFO$ , (sive  $MNL$  ob circulum); Igitur duplum rectangulum  $MLQ$ , cum rectangulis  $LMN$ ,  $LNQ$ , & quadrato  $MC$ , æquabitur quadrato  $GN$  cum quadrato  $MC$ , & rectangulo  $MNL$ , ac insuper duplo rectangulo  $GNF$ : & ablatis utrimque rectangulis  $MNL$ , & quadrato  $MC$ ; duplum rectangulum  $MLQ$ , cum rectangulo  $LNQ$  æquale erit quadrato  $GN$ , (sive  $LN$ ,) & duplo rectangulo  $GNF$ . Sed rectangulum  $LNQ$ , est æquale quadrato  $LN$ , minus rectangulo  $NLQ$ . Et similiter duplum rectangulum  $GNF$ , æquale est rectangulo ex  $GN$ , vel  $AE$ , in duplam  $EF$ , minus rectangulo ex eadem  $GN$  vel  $NL$ , in duplam  $EN$  (hoc est minus rectangulo  $NLQ$ , cum  $LQ$  sit dupla  $NE$ , ex constructione). Igitur duplum rectangulum  $MLQ$ , cum quadrato  $NL$ , minus rectangulo  $NLQ$ , æquale erit quadrato  $LN$ , cum duplo rectangulo  $AEF$ , minus rectangulo  $NLQ$ , & addito utrimque rectangulo  $NLQ$ , ablatoque quadrato  $LN$ , duplum rectangulum  $MLQ$ , æquale erit duplo rectangulo  $AEF$ ; & sumptis subduplis, rectangulum  $MLQ$ , (sive  $ABCD$  ex constructione,) æquale erit rectangulo  $AEF$ . Est igitur ut  $DA$ , ad  $EF$ , ita  $EA$ , ad  $AB$ .

Cum autem (ob circulum) rectangulum  $EFO$ , sit æquale rectangulo  $DEA$ , est etiam ut  $EF$ , ad  $EA$ , ita  $DE$  (sive  $DA$  minus  $AE$ ) ad  $FO$  (sive  $FE$  minus  $EO$ , vel  $AB$ ). Quatuor igitur rectæ  $DA$ ,  $FE$ ,  $EA$ ,  $AB$ , habent conditiones lemmatis octavi, sunt itaque continue proportionales. Quod erat demonstrandum;

Corol-

## Corollarium.

**E**X demonstratis evidens, est quomodo duæ mediæ inter datas per parabolam & ellipsim vel Hyperbolam, pluries infinitis modis inveniantur. Cum enim tam parabolæ, quam ellipses & Hyperbolæ, vt præscriptum est, delineatæ, secent circulum in F, patet illas in eodem puncto sibi occurrere.

*Addamus aliud exemplum trisectionis anguli per circulum & parabolam illam, ad quam infinitæ ellipses vel Hyperbolæ quæ idem Problema solvunt, (vt ita dicam) referuntur.*

## PROPOSITIO DECIMA QUINTA.

*Angulum datum secare trifariam per circulum & parabolam.*

**S**It rursus, vt in propositione 13. datus angulus BAC, ad centrum semicirculi SBC, & arcui BC, sumatur æqualis SH, demissisque normalibus HG, & BD, bisecetur GA, in F; & in B, ductâ tangente BO, æquali FA, iungatur AO. Tum fiat vt vtræque BD, DA, ad AO, ita AO, ad AY, indirectum ipsi DA; & in puncto Y erectâ normali indefinitâ YP, inclinetur ad illam FX, angulo semirecto. Demum ex YP, resecetur XP, quæ ad vtramque BD, DA, eandem habeat rationem, quam habet YF, ad FX; & vertice X, diametro XF, latere recto XP, describatur parabola, cuius applicatæ sint parallelæ XP, & quæ occurrat arcui BC in puncto I.

Dico, ductâ AI, angulum IAC, subtripulum esse anguli BAC,

G 2

Demig





æquale est rectangulo ex iisdem  $BD$ ,  $DA$ , in  $AY$ , (sive quadrato  $AO$ , vel quadratis  $AB$ ,  $AF$ , ex constructione,) una cum rectangulo ex iisdem  $BD$ ,  $DA$ , in  $AR$ ; Itaque duo quadrata  $AB$ ,  $AF$ , una cum rectangulis  $BDAR$ ,  $DAR$ , æqualia sunt quadrato  $IZ$ : Quadratum vero  $IZ$ , æquale est quadrato  $IR$ , cum quadrato  $RZ$ , sive  $FR$ , & duplo rectangulo  $ZRI$ , hoc est duplo rectangulo  $FRI$ . Igitur duo quadrata  $AB$ ,  $AF$ , cum rectangulis  $BDAR$ ,  $DAR$ , æqualia sunt quadratis  $IR$ ,  $FR$ , cum duplo rectangulo  $FRI$ . Est autem quadratum  $FR$  æquale quadrato  $AF$ , cum rectangulo  $GRA$ , sive cum quadrato  $AR$ , & rectangulo  $GAR$ , vel  $DAR$ ; Itaque rursus duo quadrata  $AB$ ,  $AF$ , cum rectangulis  $BDAR$ ,  $DAR$ , æqualia sunt quadratis  $IR$ ,  $AF$ ,  $AR$ , cum rectangulo  $DAR$ , & duplo rectangulo  $FRI$ . Et ablato utrimque rectangulo  $DAR$ , & quadrato  $AF$ , quadratum  $AB$ , cum rectangulo  $BD$ ,  $AR$ , est æquale quadratis  $AR$ ,  $RI$  cum duplo rectangulo  $FRI$ . Sed duo quadrata  $AR$ ,  $RI$  æqualia sunt quadrato  $AI$ , sive  $AB$ ; Igitur rursus ablatis æqualibus, hinc quadratis  $AR$ ,  $RI$ , inde quadrato  $AB$ , remanebunt æqualia rectangulum  $BD$ ,  $AR$ , & duplum rectangulum  $FRI$ . Fietque ut  $BD$ , sive  $HG$ , ad  $RI$ , ita dupla  $FR$ , ad  $RA$ . Sed cum tres  $GR$ ,  $FR$ ,  $AR$ , sint in propositione arithmetica, dupla  $FR$ , æqualis est ambabus  $GR$ ,  $RA$ . Igitur ut  $HG$ , ad  $RI$ , ita  $GR$  cum  $RA$ , ad  $RA$ .

At ut  $HG$ , ad  $RI$ , ita  $GQ$ , ad  $QR$ , itaque ut  $GR$  cum  $RA$ , ad  $RA$ , ita  $GQ$ , ad  $QR$ , & dividendo, ut  $GR$ , ad  $RA$ , ita  $GR$ , ad  $RQ$ . Unde sequitur  $AR$ ,  $RQ$ , esse æquales, & cum anguli ad  $R$  sint recti, triangulum  $AIQ$ , esse isosceles: ideoque angulum  $HIA$ , duplum esse anguli  $IAC$ . Et cum angulus  $AHI$  sit æqualis angulo  $HIA$ , & utrique  $AHI$ ,  $IQA$ , sive  $IAC$ , æqualis sit externus angulus  $HAS$ , evidens est eundem  $HAS$  (sive  $BAC$ , ex constructione) anguli  $IAC$ , esse triplum. Quod erat demonstrandum.

Non



*Non abſimili demonſtratione oſtendi poteſt, cum parabola etiam occurrat arcui SB in K, SK eſſe tertiam partem eiſdem arcus SB ut in propoſitione 13. Quod indicaffe ſufficiat, ut ſit tandem*

FINIS.



ERRATA quæ sensum turbare possent, aliquot adnotamus,  
reliqua lector benevolus corriget, & litteras in schematibus,  
quæ aliquando non satis expressæ sunt, ex constructionis  
ordine restituet.

pagina	linea	corrigere
1.	4. MHO	NHO
2.	15. CAE	DAE
4.	16. RE	RF
5.	5. demonstrandum	demonstrandum.
6.	17. MFE	MEF
8.	1. OL	OI
9.	9. AE	AD
	23. GEF	GFE
	27. 29. 30. TOQ	TQO
12.	1. DFA	DEA
	9. FF	FE
14.	18. KC	KG
16.	9. GQH	RQH
	13. IQA	IAQ
	32. EQA	FQA
17.	27. IQ	IP
	28. PA	PH
19.	4. IKL	ILK
25.	30. BAF	DAF
26.	18. dele facile	
39.	5. Z	X
41.	8. AFG	HFG
43.	6. K	F
45.	19. AC	AG

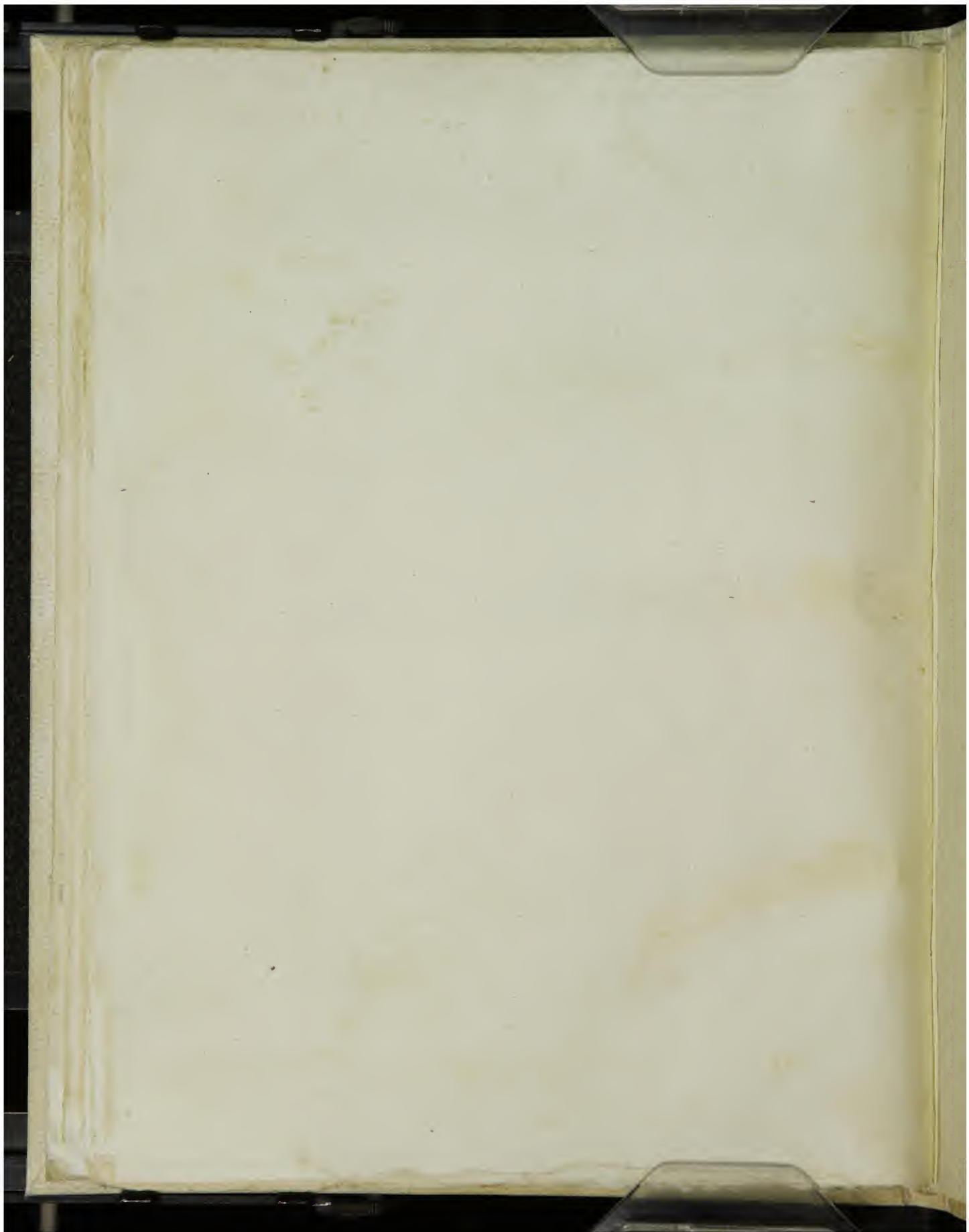


1:6, 26E

1.6.266

57

















007663887

lc





